Ruimtevaart: fysische grondslagen

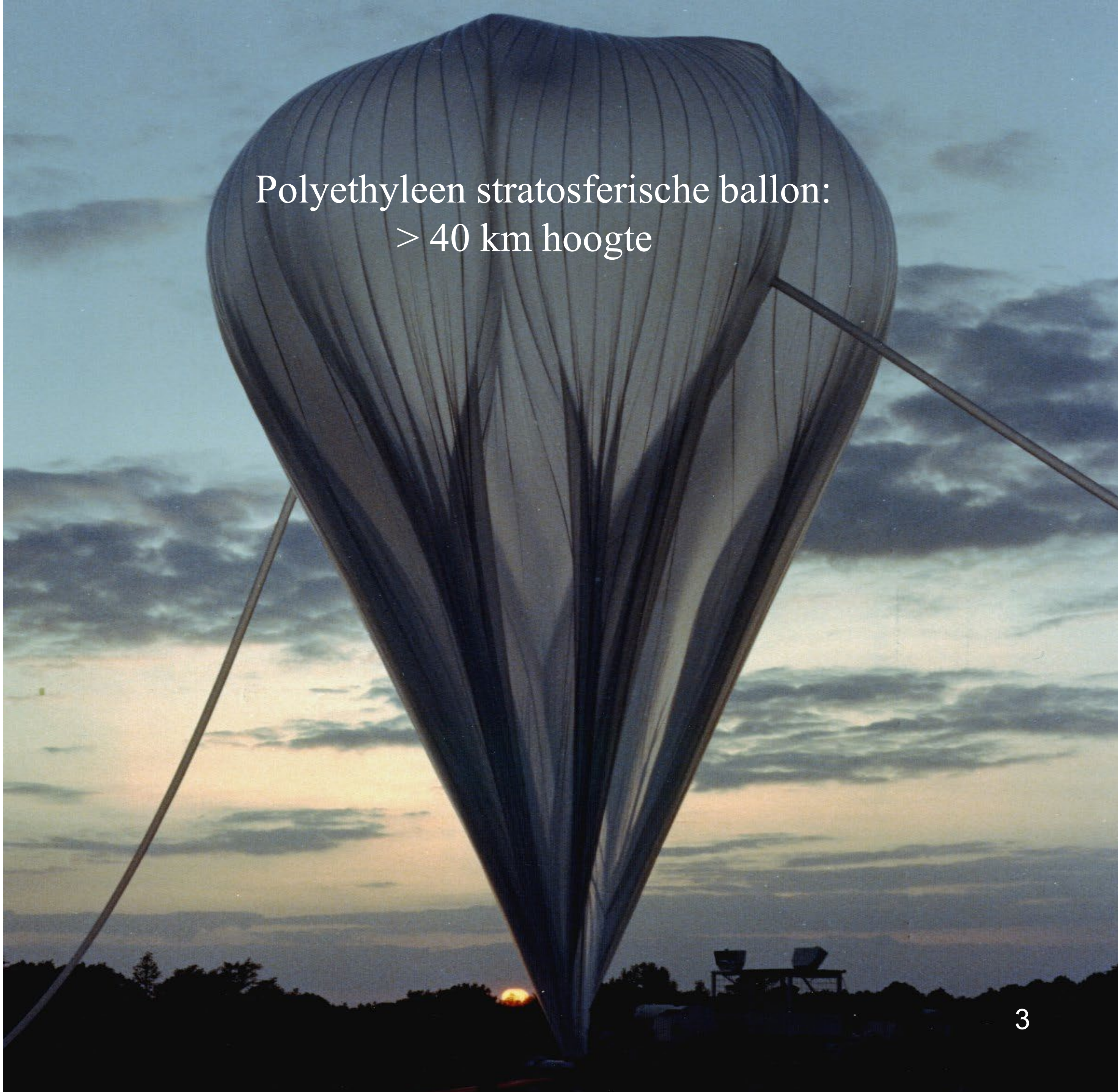
Johan Bleeker

2015

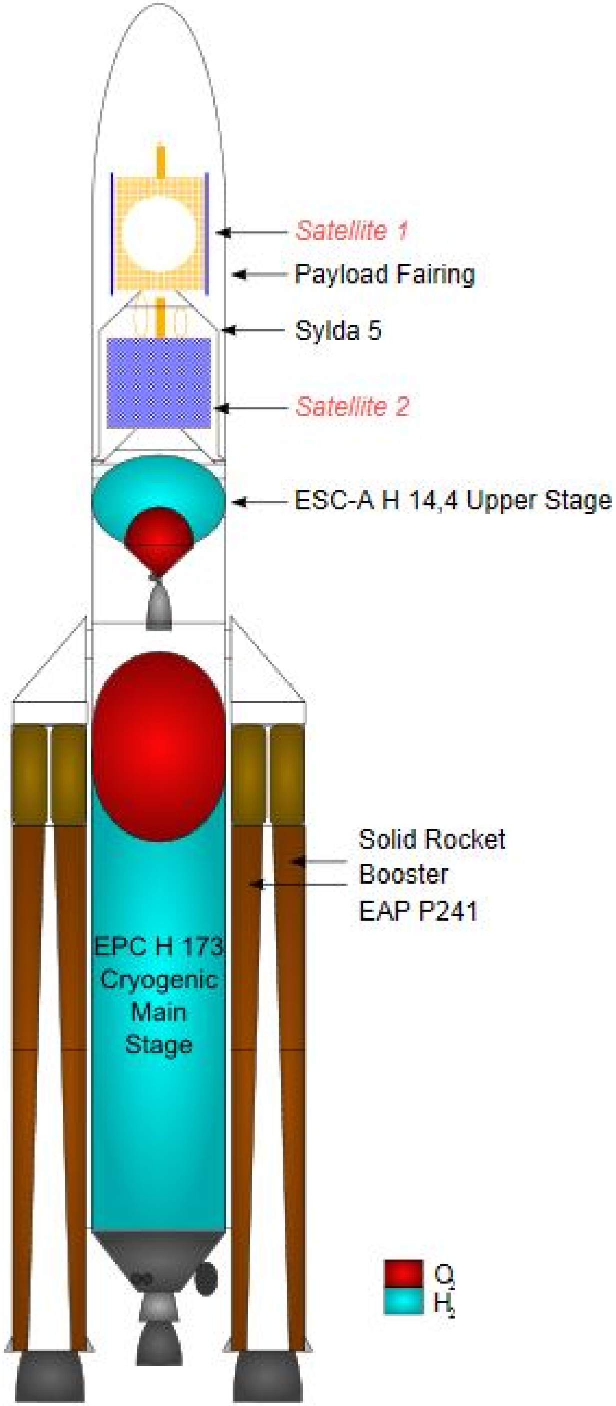
Overzicht

Transport naar de Ruimte

- Stratosferische ballonnen
- Sondeer-/Draagraketten
- Ruimtependels (bemande ruimtevaart)


Polyethyleen stratosferische ballon:
> 40 km hoogte

Draagraketten:
ESA Ariane-5 ECA: 2004+

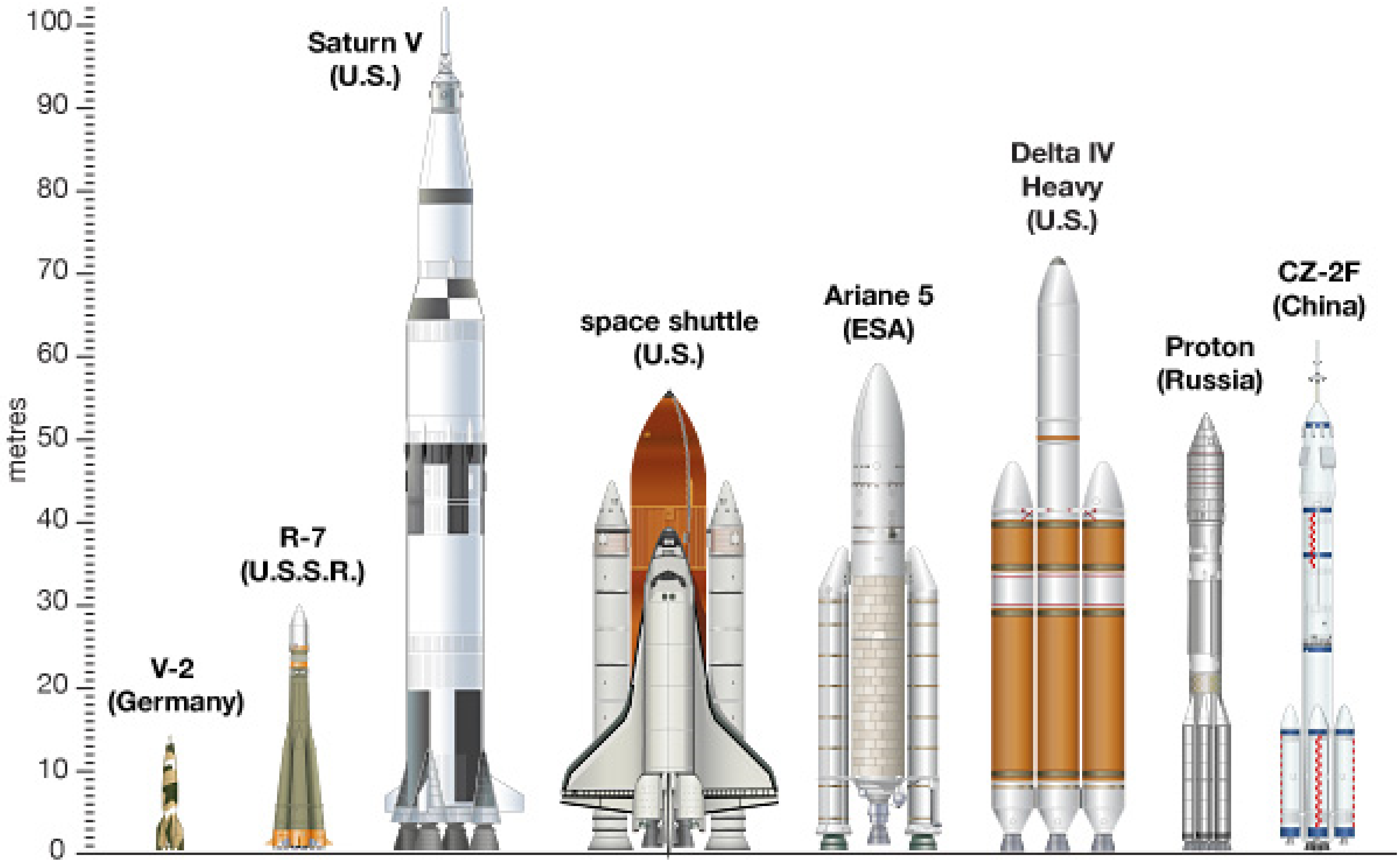


Lancering VEGA-1 13 feb. 2012

Soyuz-TMA, lift off at Baikonur to ISS

Lift-off Space Shuttle Discovery to ISS

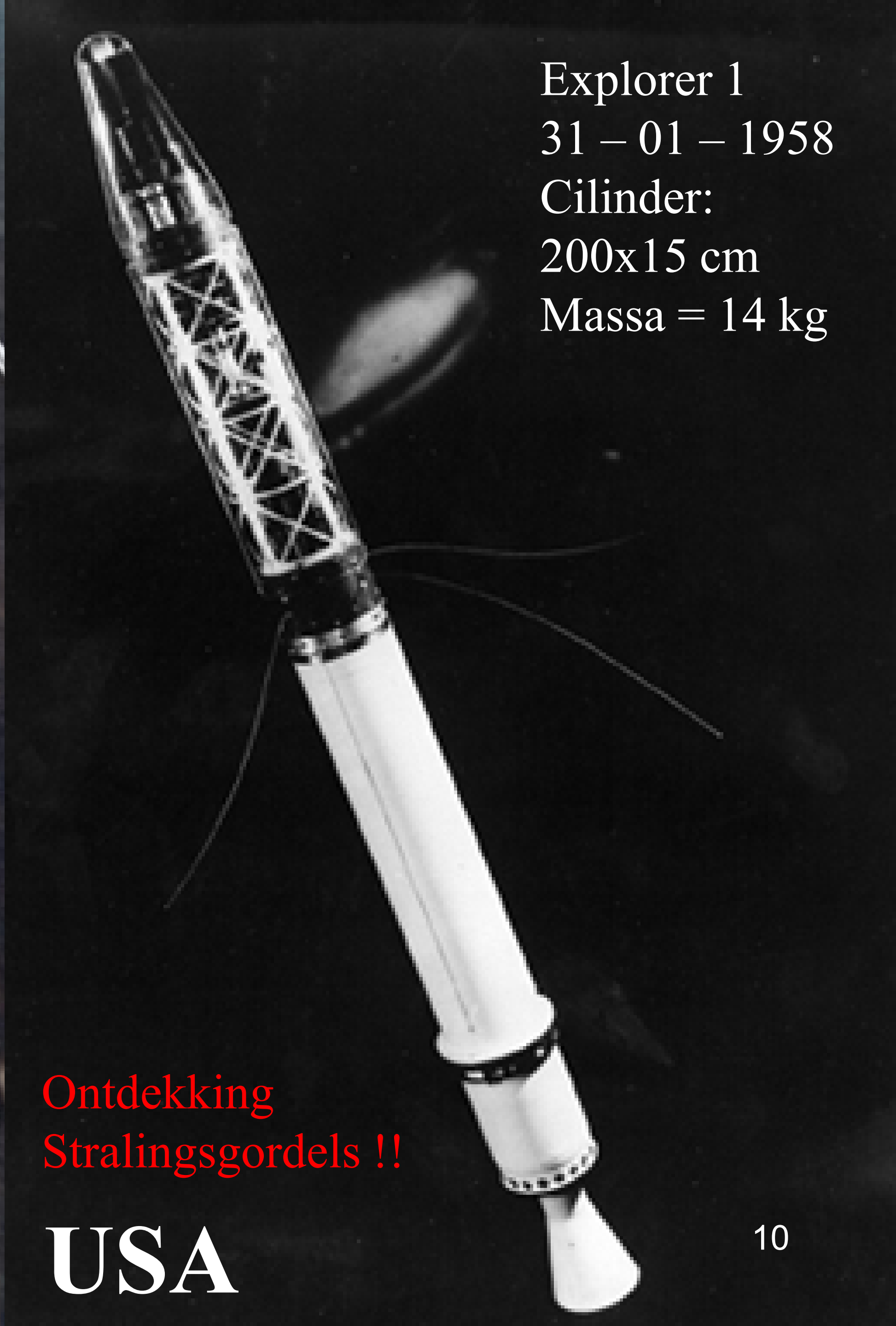
NASA's "man- rated" launchers for low-orbit and lunar missions: Shuttle 24.4 ton in low orbit, Saturn V 118 ton in low orbit



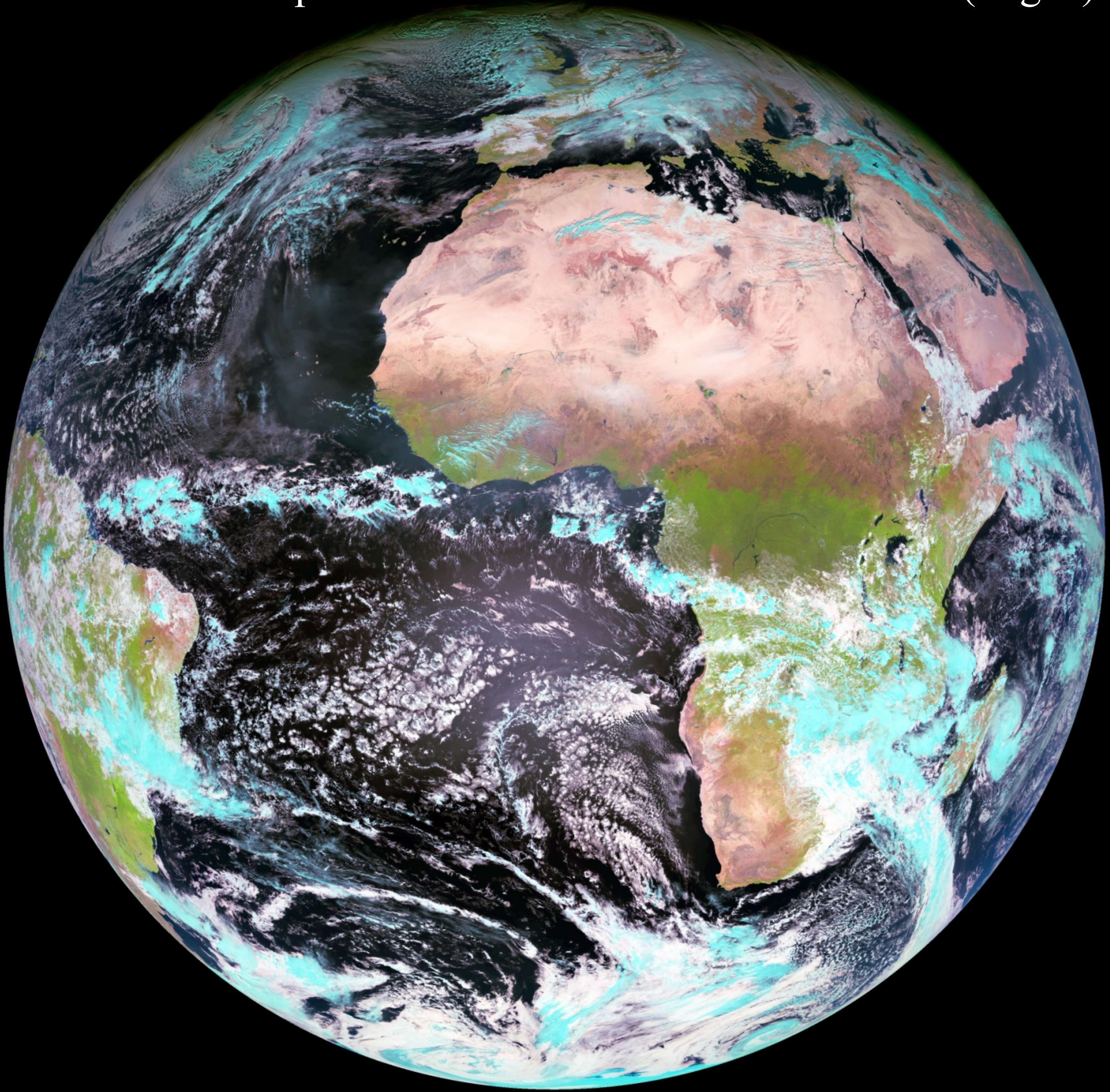
Ruimteplatformen

- Kunstmaan
- Ruimtesonde
- Maan-/Planeetlanders,
- Ruimtestation

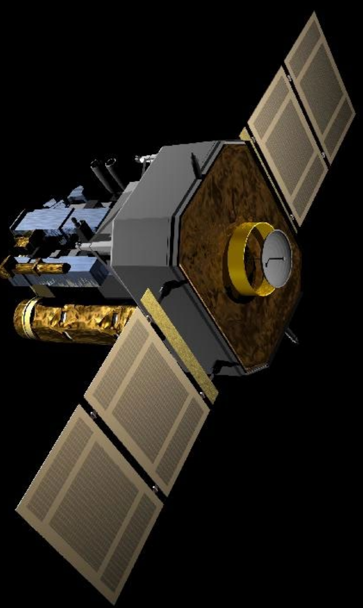

USSR
Sputnik (medereiziger)
04 – 10 - 1957
Bolvormig:
Diameter = 58 cm
Massa = 84 kg

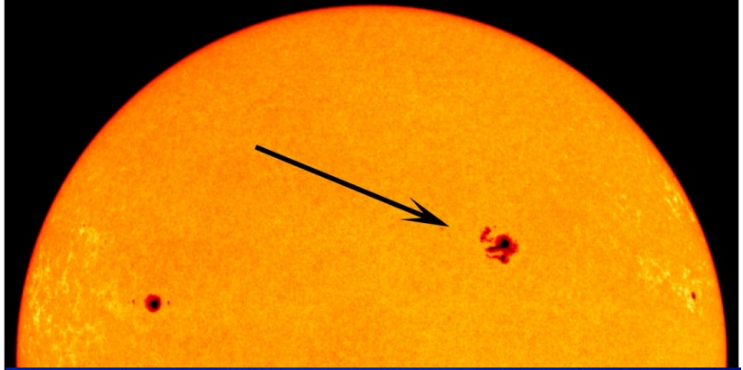

Explorer 1
31 – 01 – 1958
Cilinder:
200x15 cm
Massa = 14 kg
Ontdekking
Stralingsgordels !!
USA

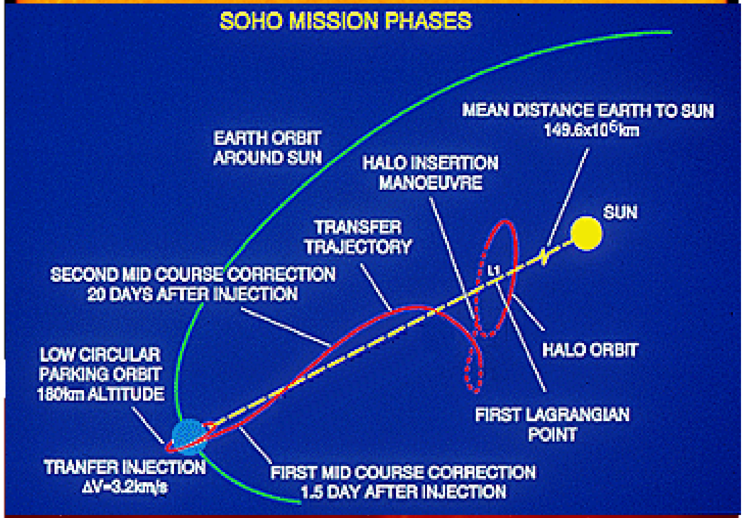
Geostationaire platformen: weersatelliet METEOSAT (2^e gen)

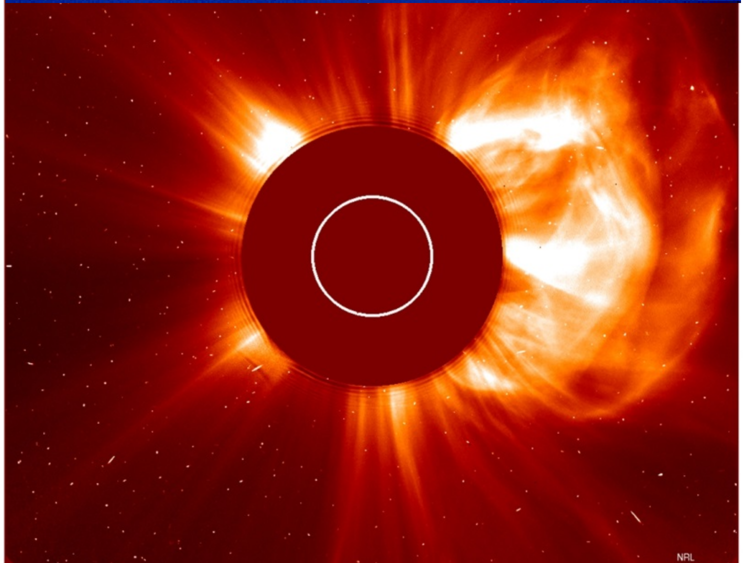


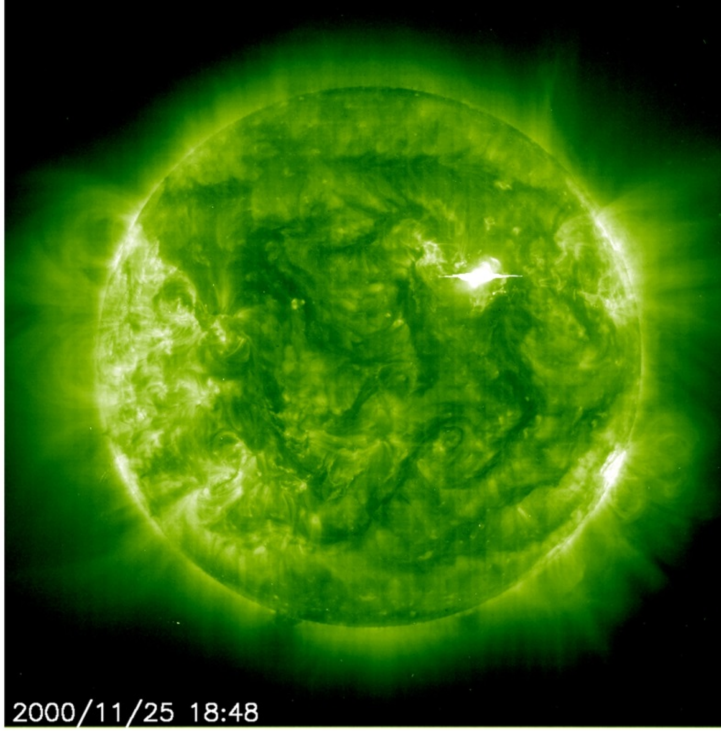
Solar and Heliospheric Observatory (SOHO)

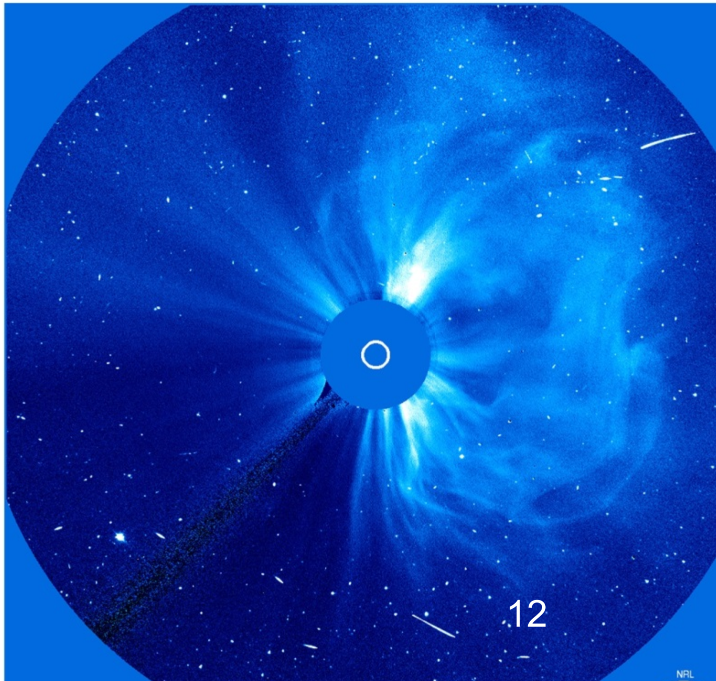




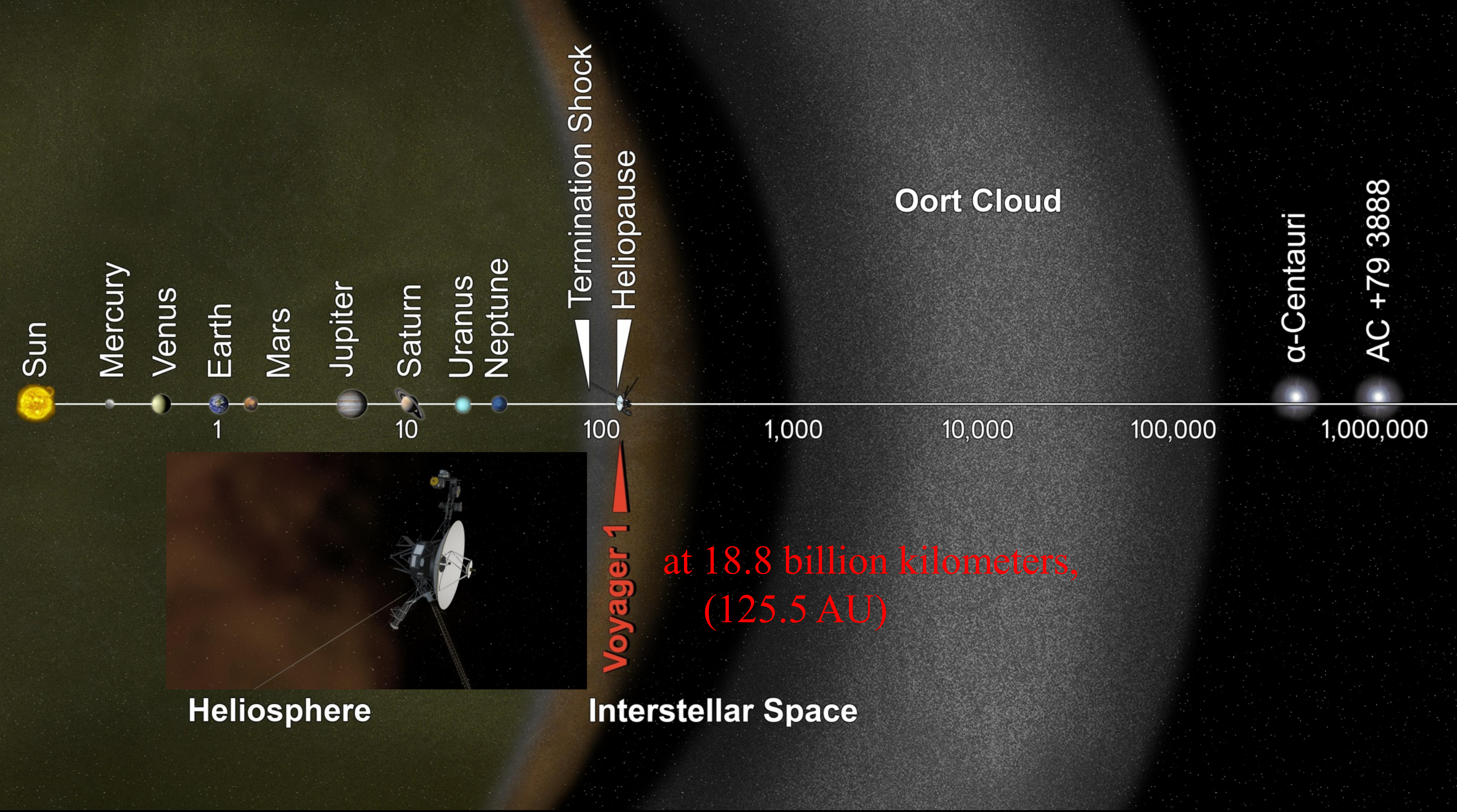








Development of Sun spot into CME



Voyager 1 at the edge of the solar system crossing the heliopause

Landers en “Rovers”

- Maan: Lunar Excursion Module

- Mars: Vikings, Spirit, Opportunity
  Phoenix, MSL – Curiosity

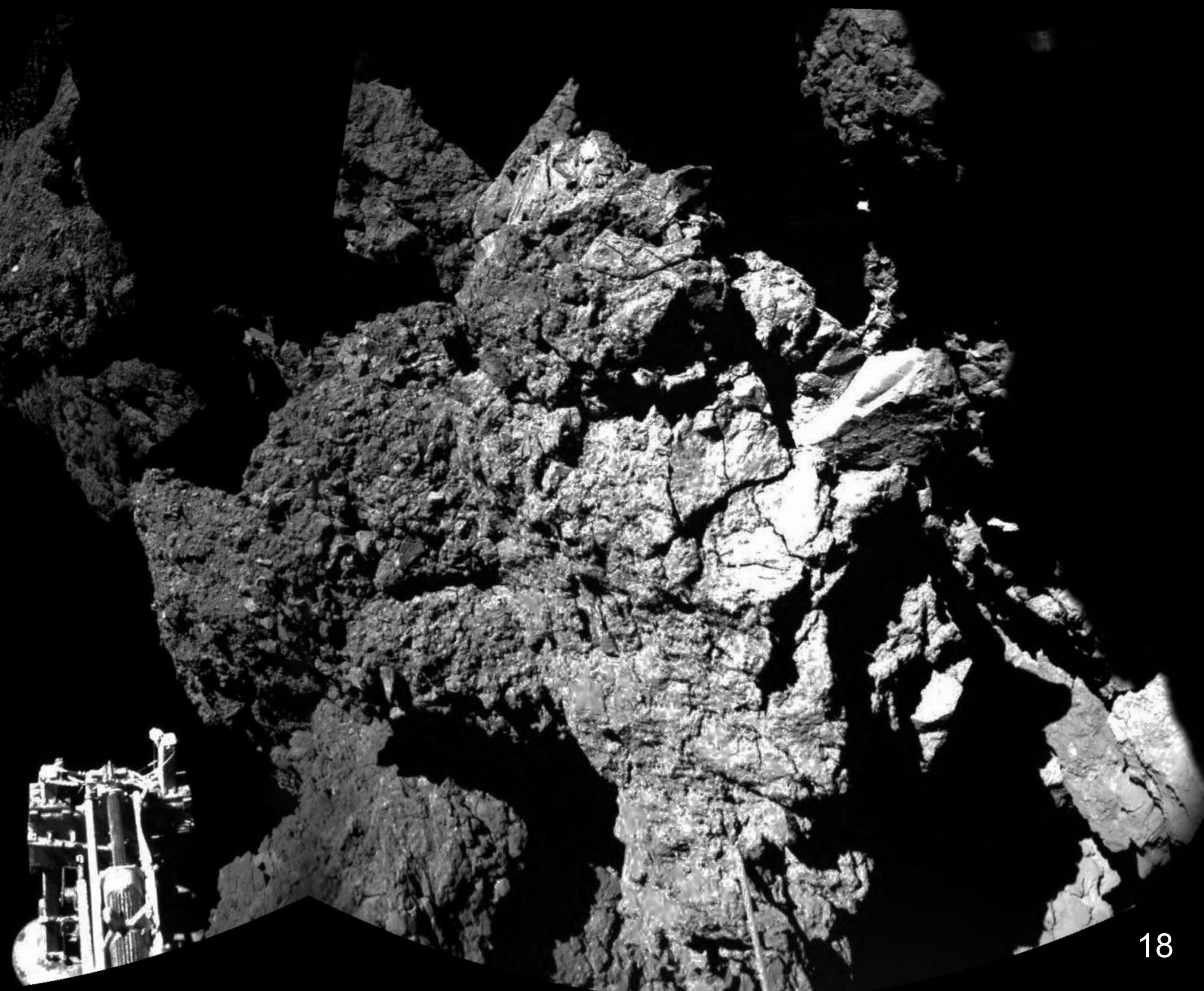
- Saturnus maan Titan: Huygens

- Komeet Churyumov-Gerasimenko: Philae

MSL-Curiosity panoramic view of Mount Sharp during search for "habitable sites" containing embedded (past) microbial life

Huygens Ruimtesonde:
Geland op het oppervlak van de Saturnus-maan TITAN op 14 jan 2005 met overtrekkende schaduw van de parachute.

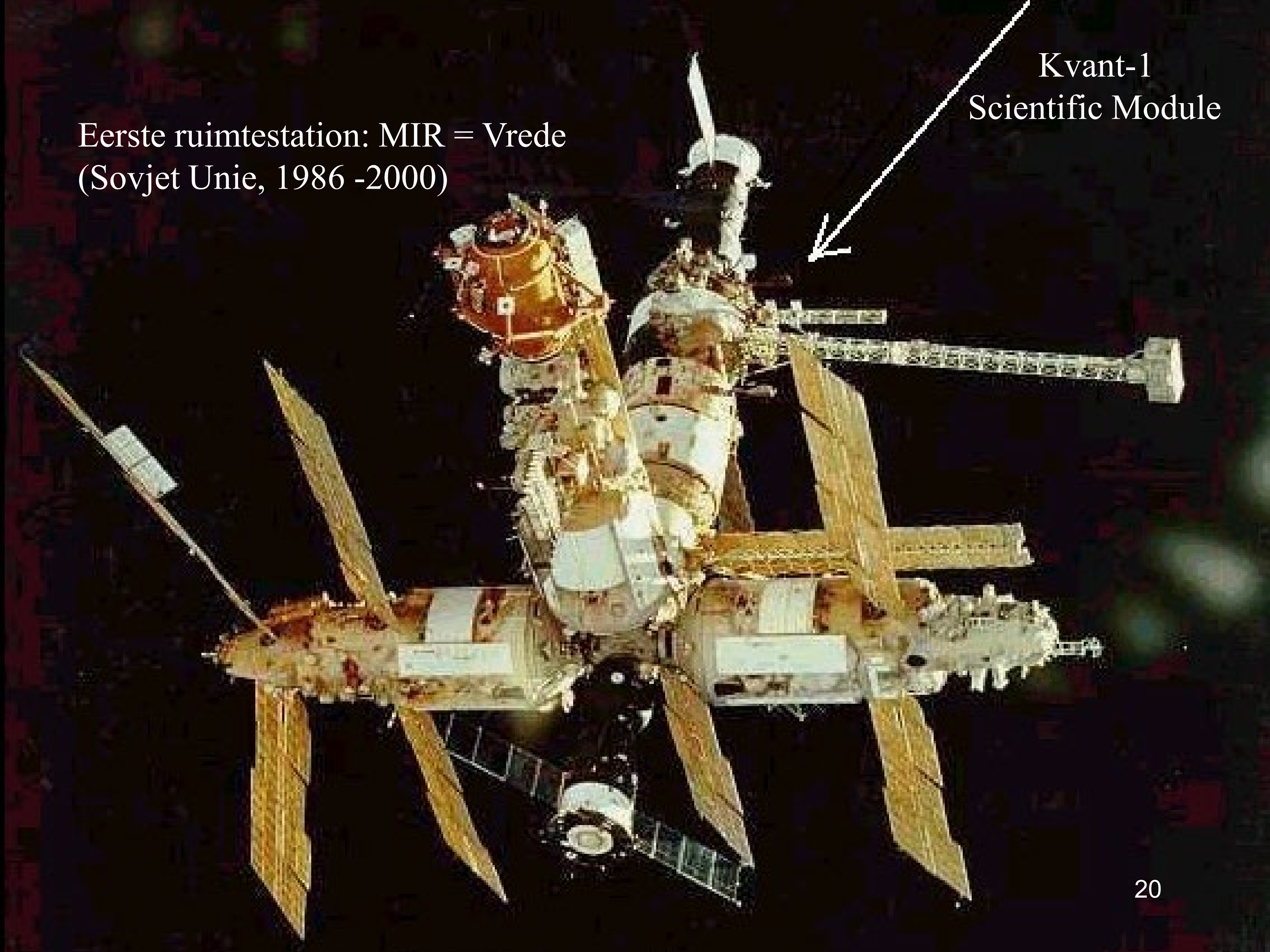
Philae-lander op de komeet P67/Churyumov-Gerasimenko



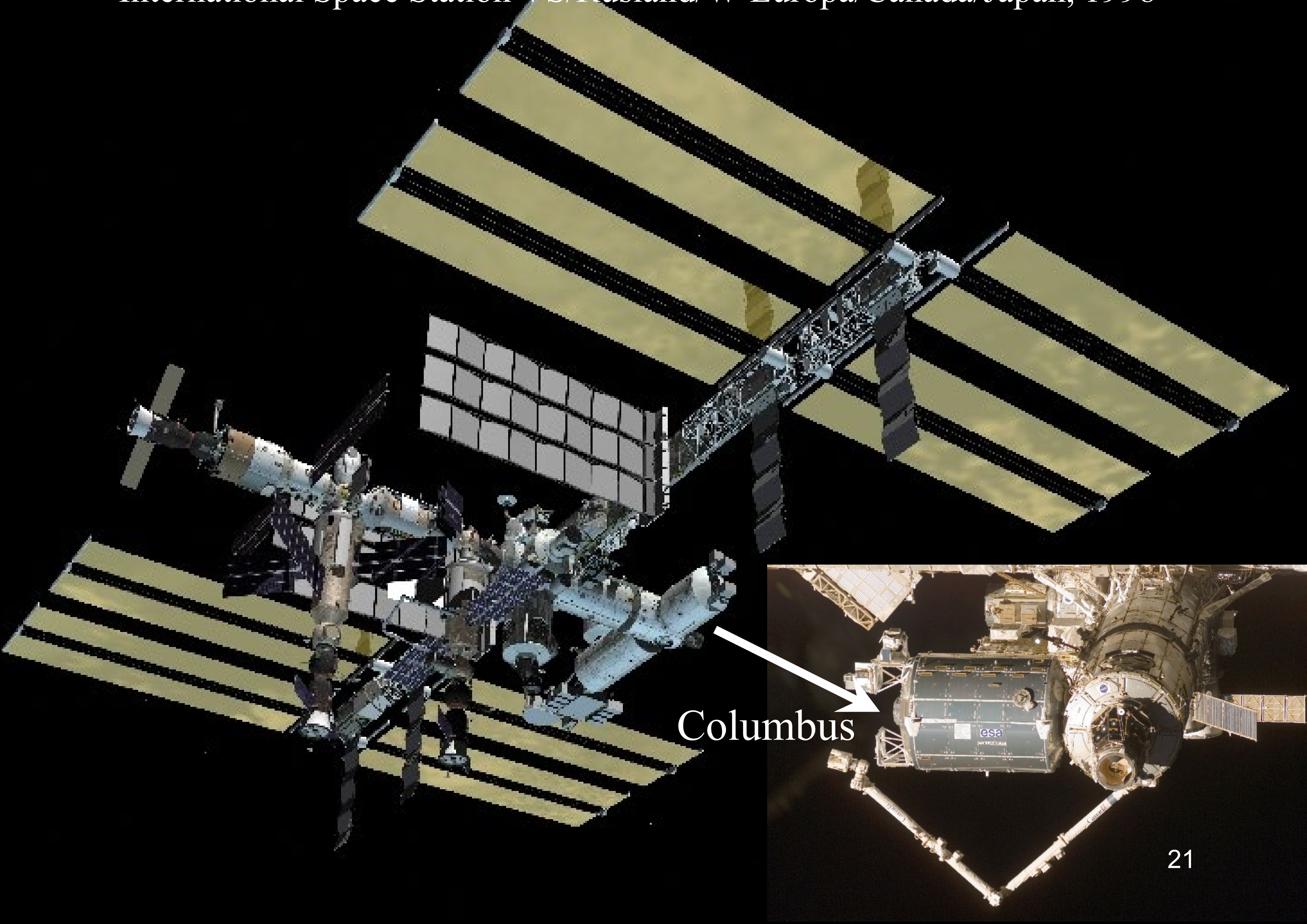
Ruimtestations

- MIR (USSR)
- International Space Station (USA, Rusland, West-Europa, Canada, Japan)

Eerste ruimtestation: MIR = Vrede
(Sovjet Unie, 1986 -2000)



International Space Station VS/Rusland/W-Europa/Canada/Japan, 1998 +



Nuttige lading (“payload”)

- Sensoren/sensorsystemen
- Robots
- Mensen


Hubble: 1990 -heden

Service in:

1993
1997
1999
2002
2009

IPSTAR1 (Thaicom4)
Launched by Ariane in
geostationary orbit 2005

97 Transponders on 6.5 ton spacecraft
High speed spot beams for fast internet
service in India, East Asia & Australia

- Functionele opbouw ruimtevaartuig
- Voortstuwingprincipes

Functionele opbouw ruimtevaartuig

- Hoofdelementen
- Payloads
- Subsystemen

Functionele opbouw: hoofdelementen

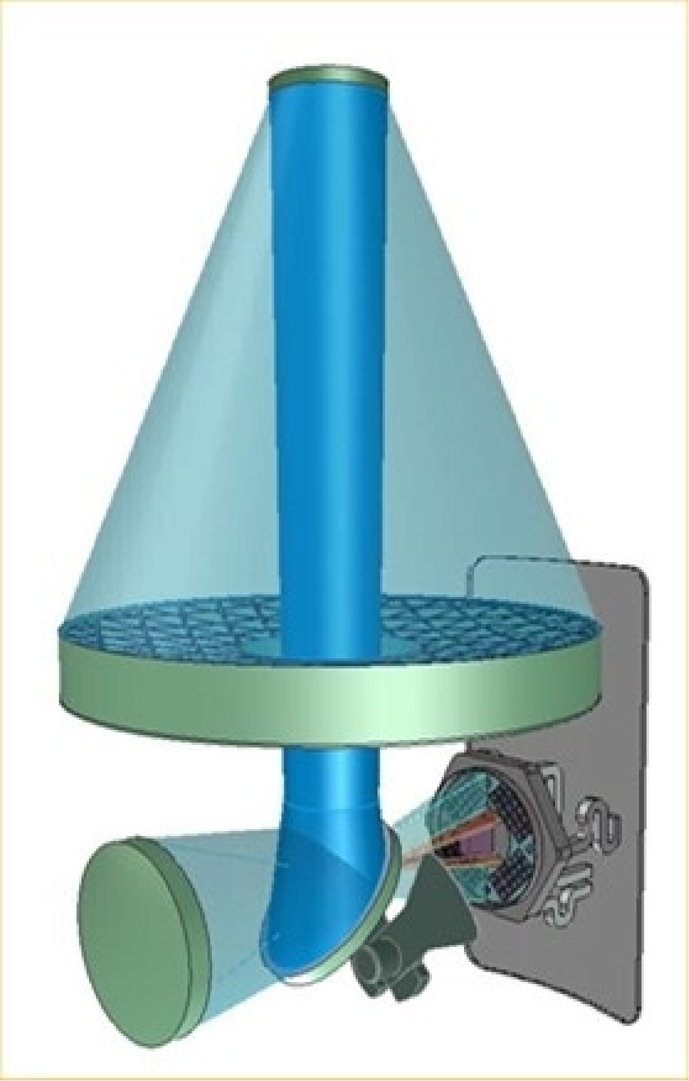
- Nuttige lading of “Payload”
  - Missie specifieke uitrusting of instrumentarium
- Ruimtevaartuigbus of “Spacecraft Bus”
  - Draagt of bevat de payload en voorziet in alle ondersteunende (“housekeeping”) functies
  - De Payload en de Spacecraft Bus zijn (1) gescheiden modules of zijn (2) als totaliteit geïntegreerd.
- Aanpassingsstuk met draagraket: “Booster Adapter”
  - Vormt de mechanische koppeling tussen raket en vaartuig
- Voortstuwingsmodule of “Propulsion Module”
  - Gebruik: baaninjectie, baancorrectie, snelheidscorrectie, standregeling

Functionele opbouw: Payload

1. Payload
(gescheiden module of integraal subsysteem)

Vb. Stralingsdetectie:

- Antennes
- (Quasi-)optica
- Afscherming
- Filtering/dispersie
- Stralingssensoren

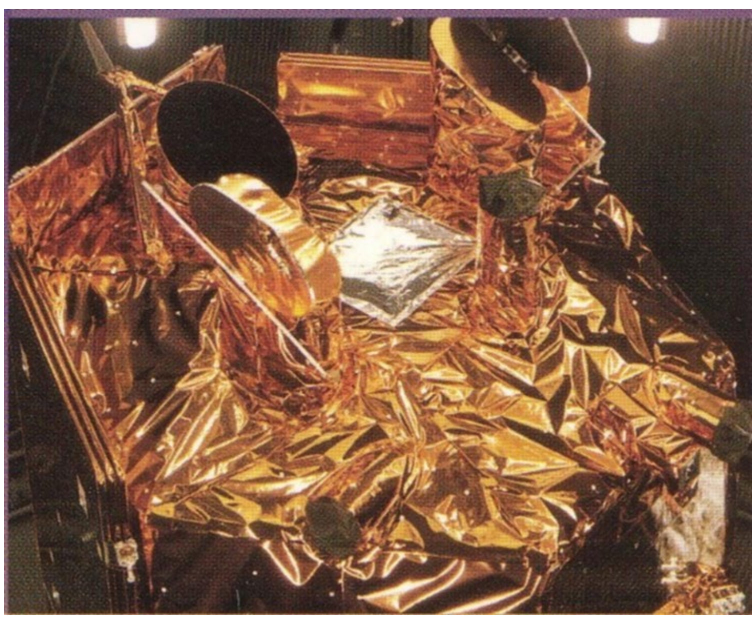


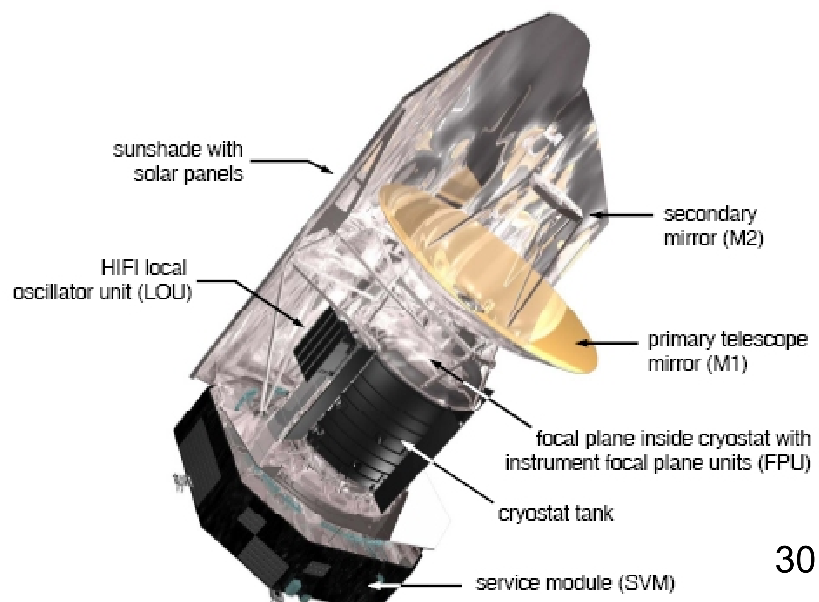
Functionele opbouw: subsystemen

2. Warmtehuishouding en koeling (↓ milliKelvins)

- Multilagen
- Coatings

- Actieve en Passieve Koelers:
  - Stralers
  - Cryostaten
  - Gesloten-cyclus koelers
  - Adiabatische demagnetisatie koelers (ADR)





Functionele opbouw: subsystemen

3. Energieopwekking en distributie

- Brandstofcellen
- Hoog-rendement zonnecellen
- Radio-isotoop aangedreven thermo-elektrische generatoren (RTG’s)
- Kernsplijting aangedreven thermo-elektrische generatoren (kernreactoren)

Functionele opbouw: subsystemen

4. Standregeling en –meting

- Gyro’s
- Reactiewielen
- Control Moment Gyro’s (CMG’s)
- Magnetometers
- Zon-/Stersensoren
- Stuurraketten
- Gesloten cognitieve systemen (expert systems)

Functionele opbouw: subsystemen

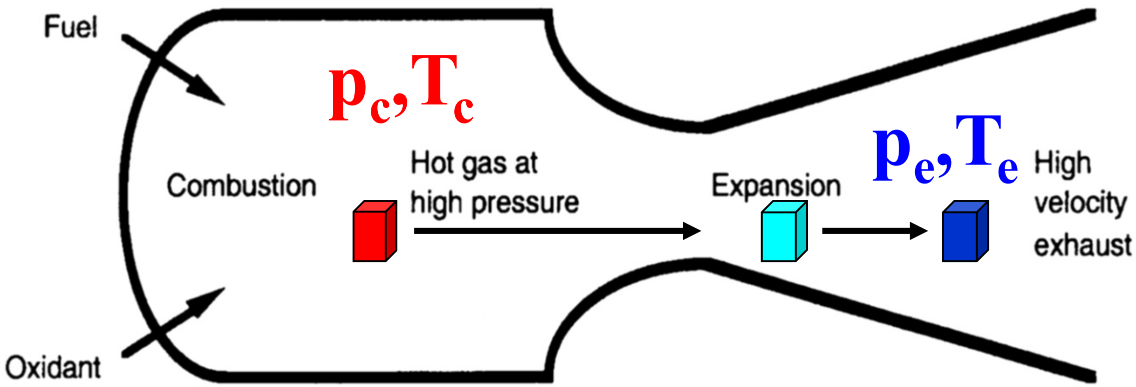
5. Informatieverwerking en –transport

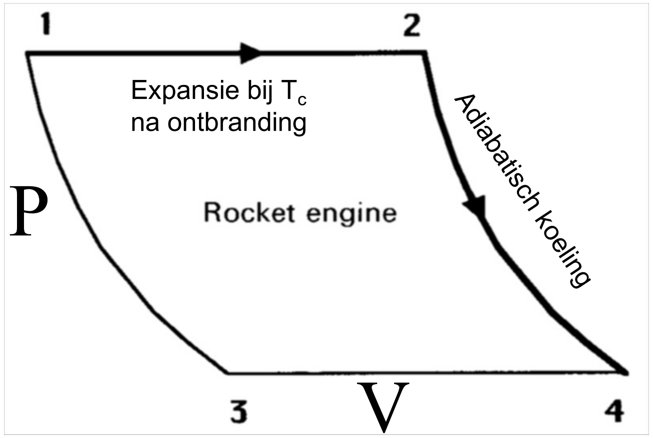
- Commando-opslag en -distributie (input: "uplink" telecommand)
- Data-conditionering (= signaalbewerking)
- Data-compressie
- Data-opslag
- Data-transport (input: "downlink" telemetrie)

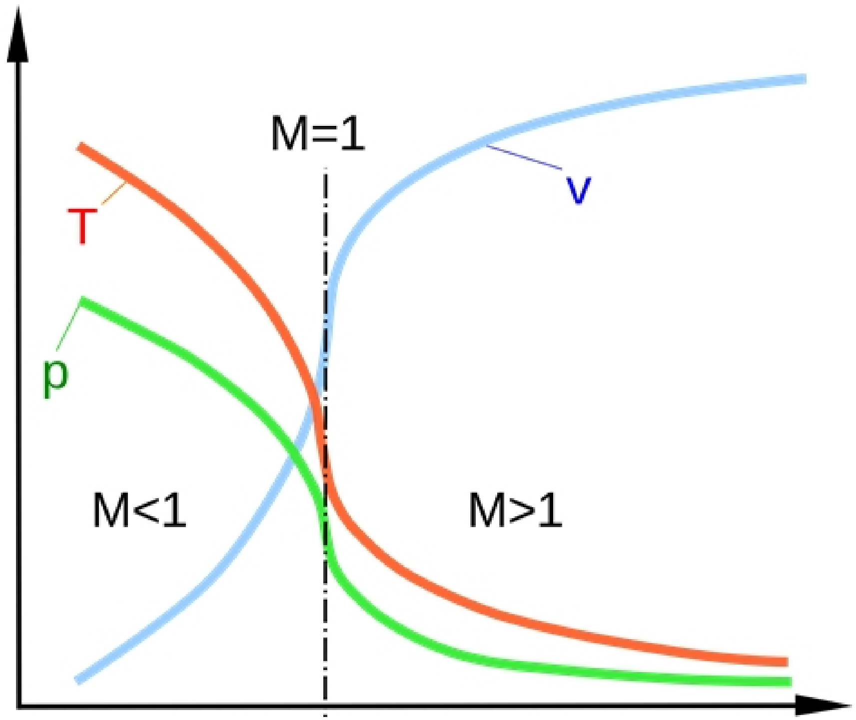
Voortstuwing

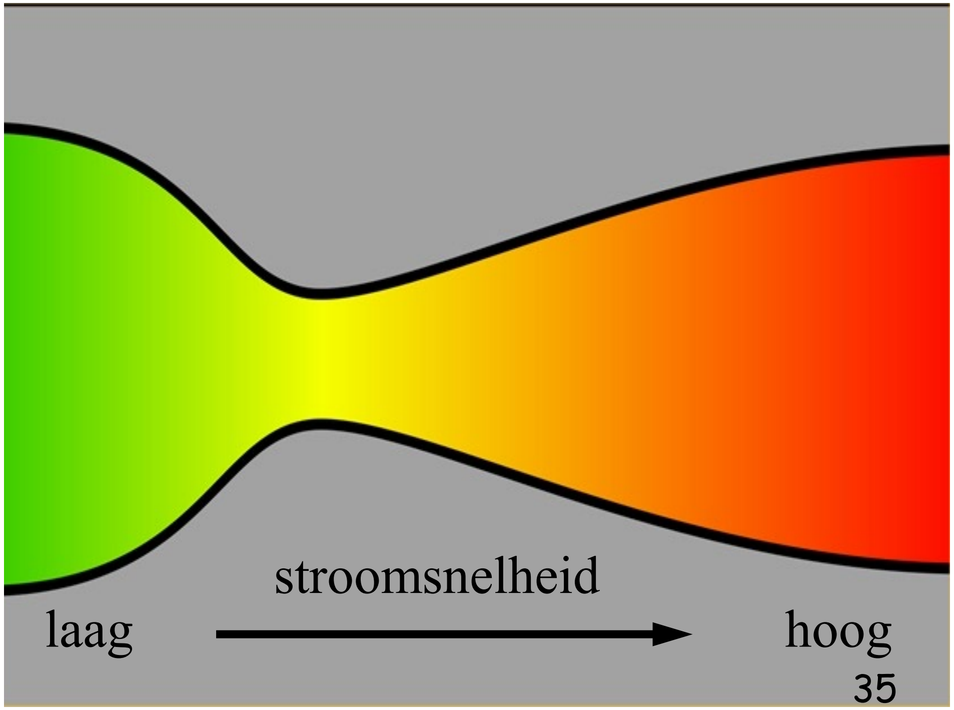
- De raketmotor als warmtemotor
- Chemische voortstuwing
- De raketvergelijking
- De brandstofmultiplicator
- Elektrische voortstuwing
- Nucleaire voortstuwing

de raketmotor als warmtemotor: v_{ex}

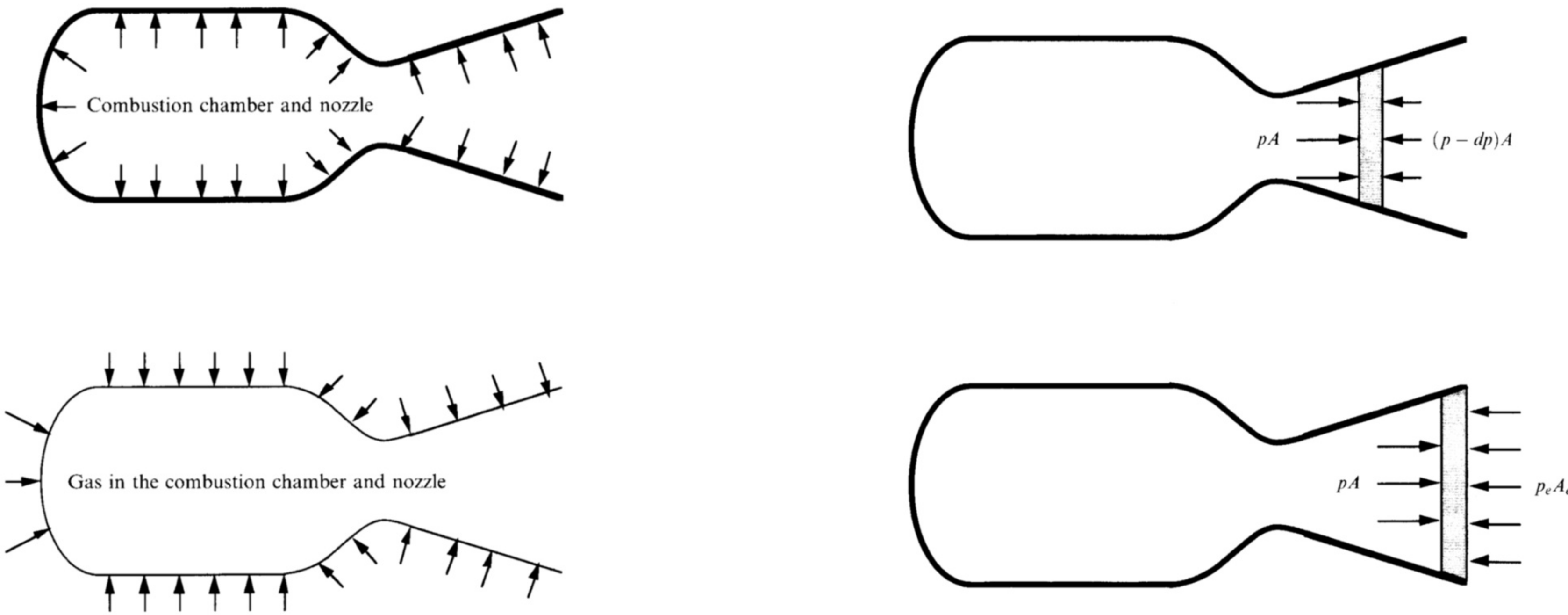








'Stuwkrachtvergelijking' voor een warmtemotor



Versnellende kracht voor gasstroom:

$F_{gas} = \oint pdA - p_e A_e = \dot{M} v_e$, $\dot{M}$ = massastroom v_e = uitstroomsnelheid

Versnellende kracht op de raket:

$$F_{raket} = \oint pdA - p_a A_e, \; p_a = \text{atmosferische druk}$$

Substitutie van $\oint$ pdA uit F_{gas} geeft de stuwkrachtvergelijking:

$$F_{raket} = \dot{M} v_e + A_e (p_e - p_a)$$

Stuwkrachtvergelijking: de uitstroomsnelheid v_e

Enthalpie per massa eenheid H = U(inwendige energie) + pV → een temperatuursverandering ΔT geeft een enthalpieverandering $\Delta H = c_p \Delta T$, waarin c_p de soortelijke warmte is bij constante druk.
De enthalpie van het gas in de verbrandingskamer wordt omgezet in kinetische energie van een massastroom ΔM aan de uitgang van de raketmotor:

$$\Delta H_T = c_p \Delta M (T_c - T_e) = \frac{1}{2} \Delta M v_e^2 \rightarrow$$

$$v_e^2 = 2c_p (T_c - T_e) \rightarrow \text{voor adiabatische expansie geldt:}$$

$$pV^{\gamma} = C_1 \ \text{ en } \ Tp^{\frac{(1-\gamma)}{\gamma}} = C_2 \ \ (\gamma = \text{adiabatische index} = \frac{c_p}{c_v}) \rightarrow$$

$$v_e^2 = \frac{2\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{RT_c}{\mu} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}} \right],$$

met μ = mol. gewicht uitlaatgasstroom en R de universele gasconstante.

$$v_e^2 = \frac{2\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{RT_c}{\mu} = \text{maximaal voor } p_e = 0, \ \gamma \approx \frac{6}{5} \ !$$

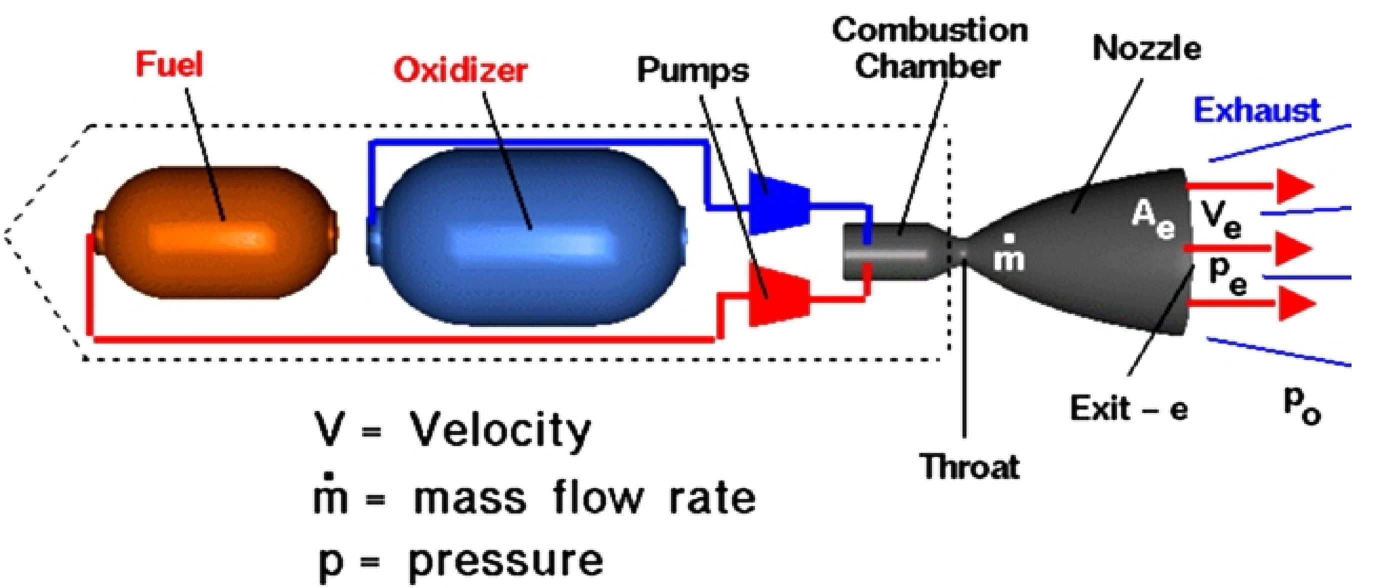
Typische uitstroomsnelheden v_e

- 1,7 – 2,9 km/sec voor "liquid monopropellants"
- 2,9 – 4,5 km/sec voor "liquid bipropellants"
- 2,1 – 3,2 km/sec voor "solid propellants"

- v_e wordt vaak gegeven als "specifieke impuls"(specific impulse):

$$I_{sp} = v_e/g_e \text{ (sec)}, \quad g_e = 9{,}8 \text{ m/sec}^2$$

Liquid bipropellant raketmotor: Space Shuttle Main Engine



Stuwkrachtvergelijking: de massastroom $\dot{M}$

De continuïteitsvergelijking voor de massastroom :

$\dot{M} = \rho\, v\, A = \text{constant}$, ρ = dichtheid in een willekeurig punt, v en A : snelheid en doorsnede - oppervlak in dat punt.

De toestandsvergelijkingen van het stromende gas :

Ideale gaswet : $pV = nRT \rightarrow p = \dfrac{\rho RT}{\mu} \rightarrow \rho_c = p_c \dfrac{\mu}{RT}$, n = aantal mol's gas (SI : kilogrammoleculen)

Adiabatische gaswet $pV^{\gamma} = \text{constant} \rightarrow \dfrac{\rho}{\rho_c} = \left(\dfrac{p}{p_c}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rightarrow \rho = \dfrac{\mu\, p_c}{RT_c}\left(\dfrac{p}{p_c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

Invullen van ρ en v (zie formule uitstroomsnelheid) in de continuïteitsvergelijking levert, na enige manipulatie, voor de massastroom :

$$\dot{M} = p_c A_{\text{throat}} \left\{ \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}} \frac{\mu}{RT_c} \right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad \text{invullen in } F_R = v_e \dot{M} + A_e (p_e - p_a)$$

levert de thermodynamische stuwkracht ("thrust") vergelijking van de raketmotor :

$$F_R = p_c A_{\text{throat}} \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma-1}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + A_e (p_e - p_a)$$

In vacuüm $(p_a = 0)$ en $\dfrac{p_e}{p_c} = 10^{-3} \Rightarrow$ voor de Ariane - 5 Vulcain - 2 motor $(\gamma = 1{,}2)$:

$A_{\text{throat}} \approx 0{,}07\,\text{m}^2$, $p_c = 110\,\text{bar}\ (1.1\text{x}10^7\ \text{Nm}^{-2})$, expansieverhouding $\dfrac{A_e}{A_{\text{throat}}} \approx 60$

Stuwkracht Vulcain - 2 $\rightarrow F_R \approx 1{,}4$ MegaNewton $\Leftrightarrow$ SSME $\approx 2{,}3$ MegaNewton

Betekenis stuwkrachtcoëfficient C_F

De stuwkrachtcoëfficient wordt gedefinieerd als:

$$C_F = \frac{F_R}{p_c A_{throat}}$$

C_F is een maat voor het rendement waarmee de "nozzle" energie onttrekt aan het hete gas in de verbrandingskamer, alle parameters kunnen direct experimenteel worden gemeten!

Invullen van de thermodynamische uitdrukking voor F_R geeft:

$$C_F = \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{A_e}{A_{throat}} \left(\frac{p_e}{p_c} - \frac{p_a}{p_c} \right)$$

In vacuum ($p_a = 0$) en met een perfecte "nozzle" ($p_e = 0$):

$$C_F = \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ voor } \gamma = 1{,}2 \text{ volgt } C_F = 2{,}25$$

Zonder nozzle is er nog steeds stuwkracht, de uitgangsdruk p_e is dan p_{throat} en het uitgangsoppervlak A_{throat}, voor de stuwkrachtcoefficient volgt dan $C_F = 1{,}24$.

Zonder nozzle (vb. leeglopende ballon) is de stuwkracht dus bijna een factor 2 lager.

C_F toont eveneens maximale stuwkracht indien $p_e = p_a$.

De karakteristieke snelheid c_k

De karakteristieke snelheid c_k is een maat voor het omzettingsrendement van thermische energie in de verbrandingskamer naar een hoge - snelheidsgasstroom aan de uitgang van de raketmotor en wordt gedefineerd als :

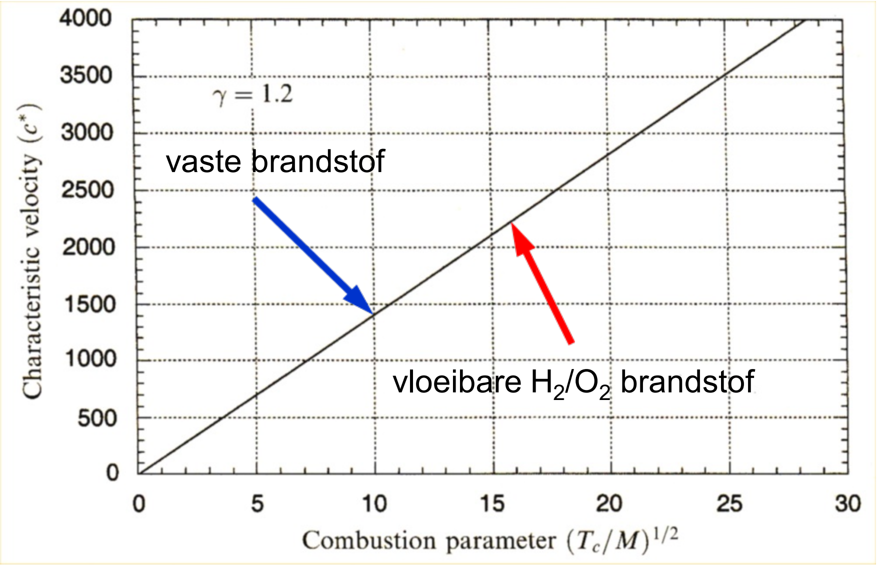
$$c_k = \frac{p_c A_{throat}}{\dot{M}}$$, met de dimensie snelheid (m/sec) en gebaseerd op meetbare grootheden.

Substitutie van de uitdrukking voor de massastroom $\dot{M}$ levert de thermodynamische uitdrukking :

$$c_k = \left\{ \gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}} \frac{\mu}{RT_c} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$, evenredig met $\sqrt{T_c/\mu}$ = de verbrandingsparameter

Combinatie van de uitdrukkingen voor de karakteristieke snelheid c_k en de stuwkrachtparameter C_F :

$F_R = \dot{M} c_k C_F$, het product van c_k en C_F geeft de "effectieve" uitstroomsnelheid $u_e = c_k C_F$



Stuwkracht, Stuwvermogen en Totale Impuls

- Stuwkracht = impuls per eenheid van tijd:

$$F_R = \dot{M} u_e \qquad \text{(Newton)}$$

$\dot{M}$ = massastroom (kg/sec)

$u_e = c_k C_F = v_e + A_e(p_e - p_a)/\dot{M}$ = effectieve uitstroomsnelheid (m/sec)

- Stuwvermogen = energiestroom (Joule/sec = Watt):

$$P = \tfrac{1}{2}\dot{M} u_e^2 = \tfrac{1}{2} F_R u_e \qquad \text{(Watt)}$$

- Totale Impuls = F_R geïntegreerd over de totale stuwtijd t:

$$I_{tot} = F_R t \qquad \text{(Newton·seconden)}$$

Voortstuwing: de “Raket vergelijking”

Eerste formulering door Konstantin Tsiolkovsky: Integratie van de wet van impulsbehoud:

Raketmotor met effectieve gasuitstroomsnelheid v_e :

$$dI = 0 \rightarrow M dv + v_e dM = 0 \rightarrow \int_0^{\Delta v} dv = -v_e \int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M},$$

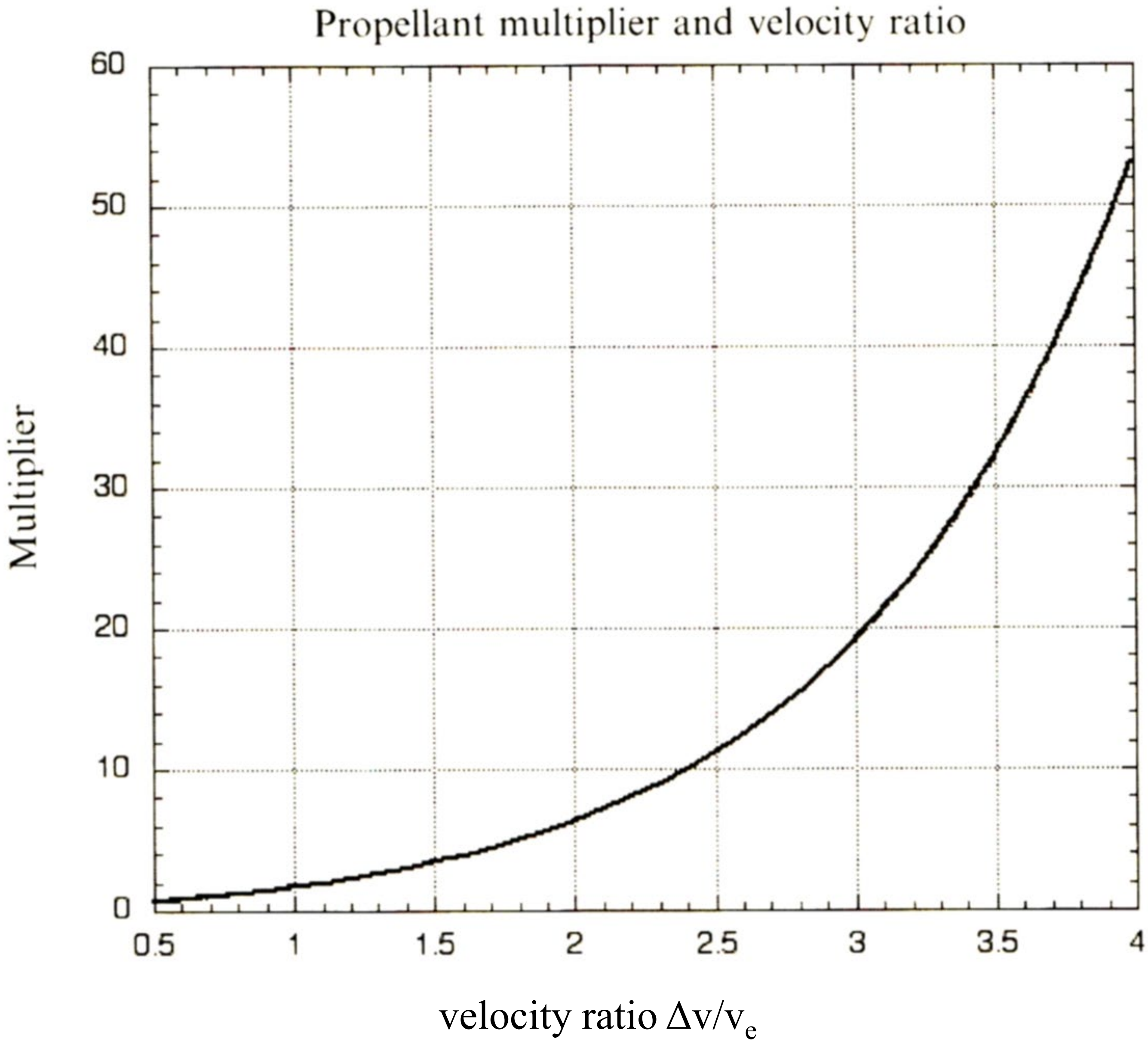
met M_0 de massa bij ontsteking en M de actuele massa $\rightarrow$

$$\Delta v = v_e \,\ell n\left(\frac{M_0}{M}\right) = \text{elementaire raketvergelijking}$$

Met $M_0 = M_d + M_f$, M_d de "dry mass" en M_f de "fuel mass":

$$\frac{M_f}{M_d} = \text{multiplier} = \exp\left(\frac{\Delta v}{v_e}\right) - 1 \rightarrow \text{sterk afhankelijk van } \frac{\Delta v}{v_e}$$

Voortstuwing: de “Raket vergelijking”



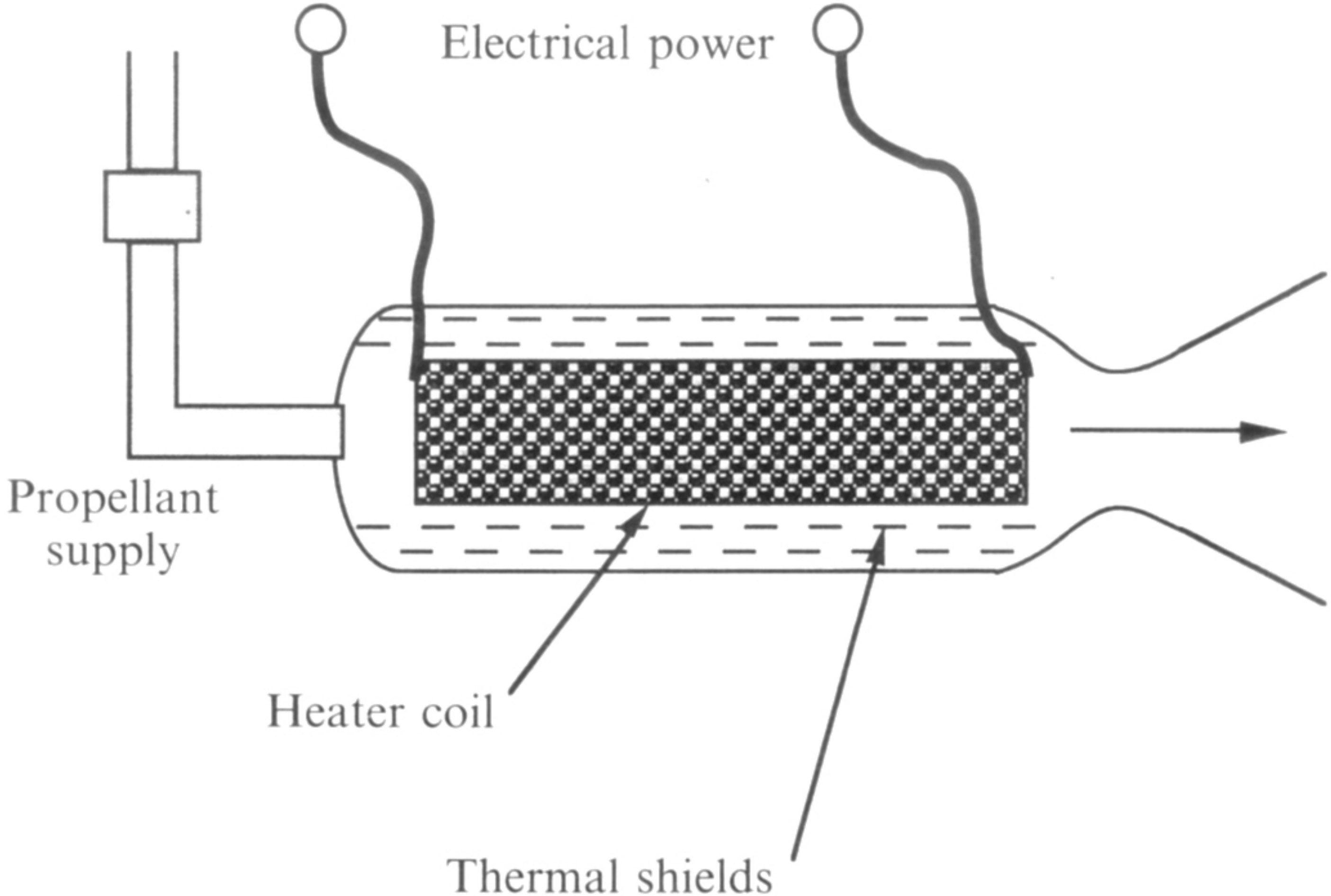
Raketmotor: electrische voortstuwing

- Chemische voortstuwing : intrinsieke beperking doordat niet meer energie beschikbaar is voor de raket dan aanwezig in de **toegevoerde brandstof** !
- Electrische voortstuwing: electrische energie wordt **toegevoerd aan de stuwstof** en wordt geleverd door een externe krachtbron!

  Electrische voortstuwing onder te verdelen in:

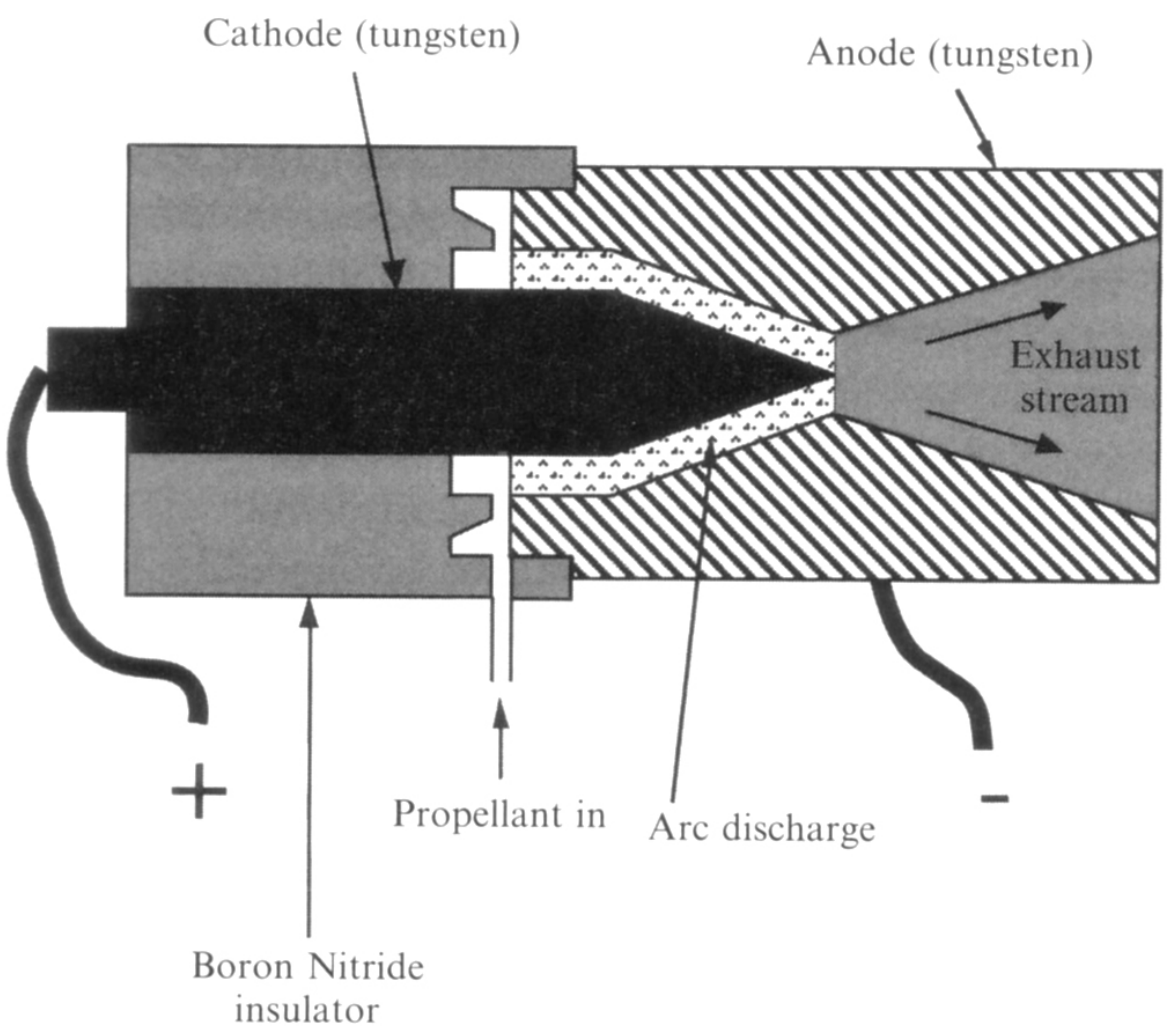
  - Electro-thermische thrusters, electrisch gedreven
  - Boogontlading thrusters (arc-jet thrusters), electrisch gedreven
  - Ionen thrusters, electromagnetisch gedreven
  - Plasma thrusters, electromagnetisch gedreven

Principe electrothermische thruster (resisto-jet)



Maximaal ≈ 2200 K voor Ohmse verhitting, $v_e \approx 10$ km/sec voor waterstof, 3 km/sec voor hydrazine (groter molecuulgewicht). Laag thrust vermogen 0,5-1,0 kW, gebruik voor standregeling en voor N-Z station keeping voor telecommunicatie satellieten.

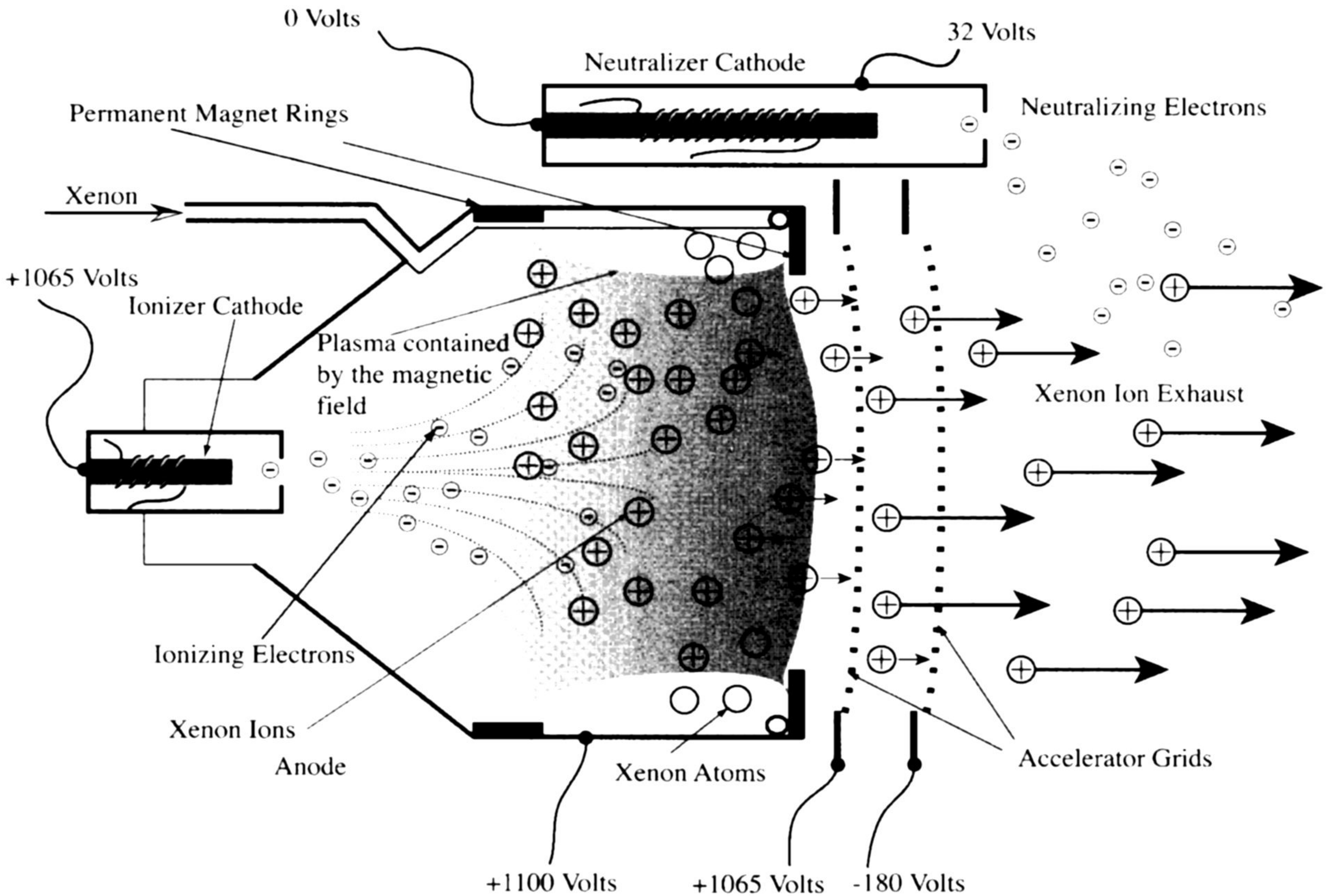
Principe Arc-jet thruster



Stuwgas: waterstof ($v_e \approx$ 20 km/sec), hydrazine ($v_e \approx$ 6 km/sec)

Lage thrust (2-3 kW), N-Z "station keeping" voor telecommunicatie satellieten

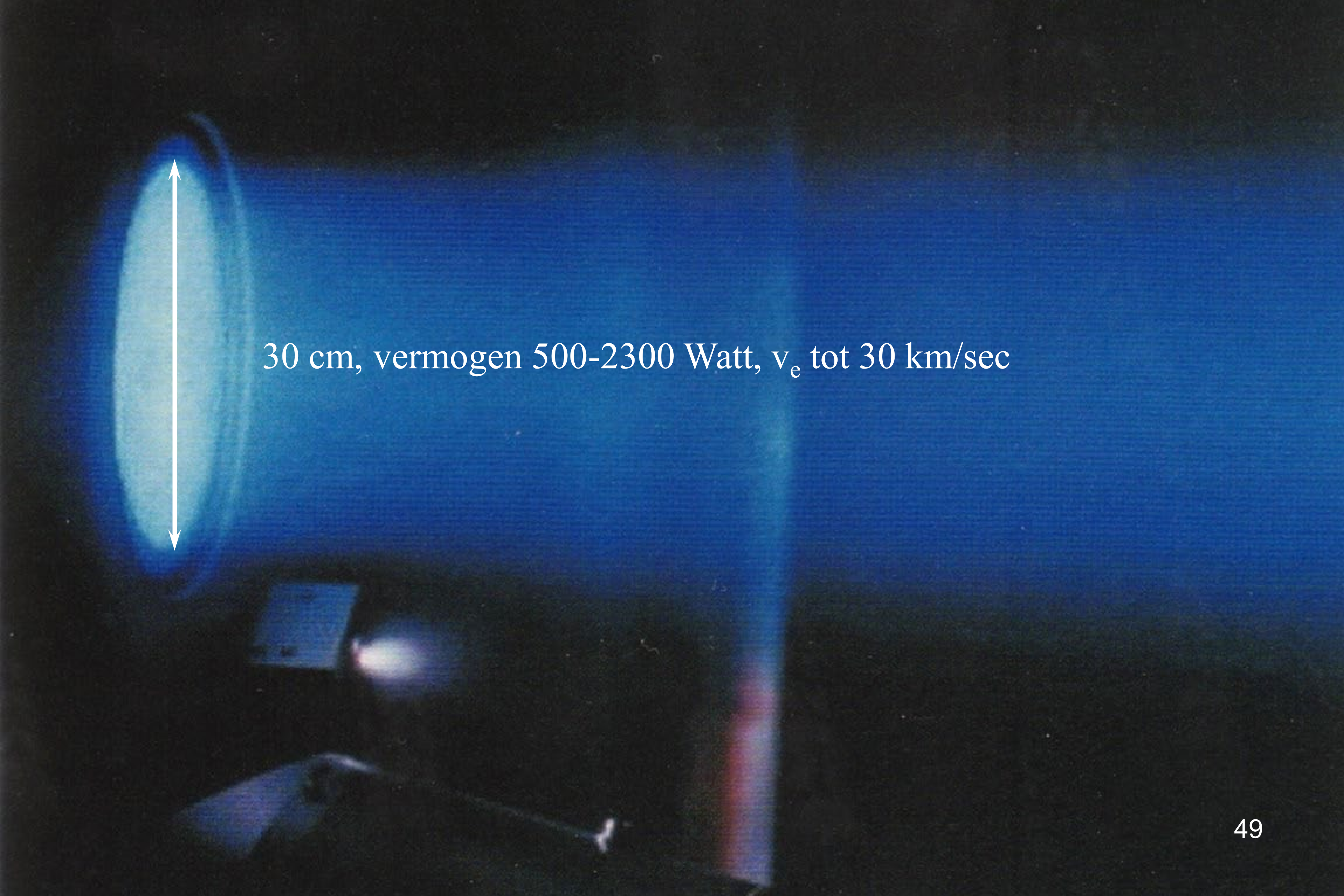
Principe van een ionen-thruster



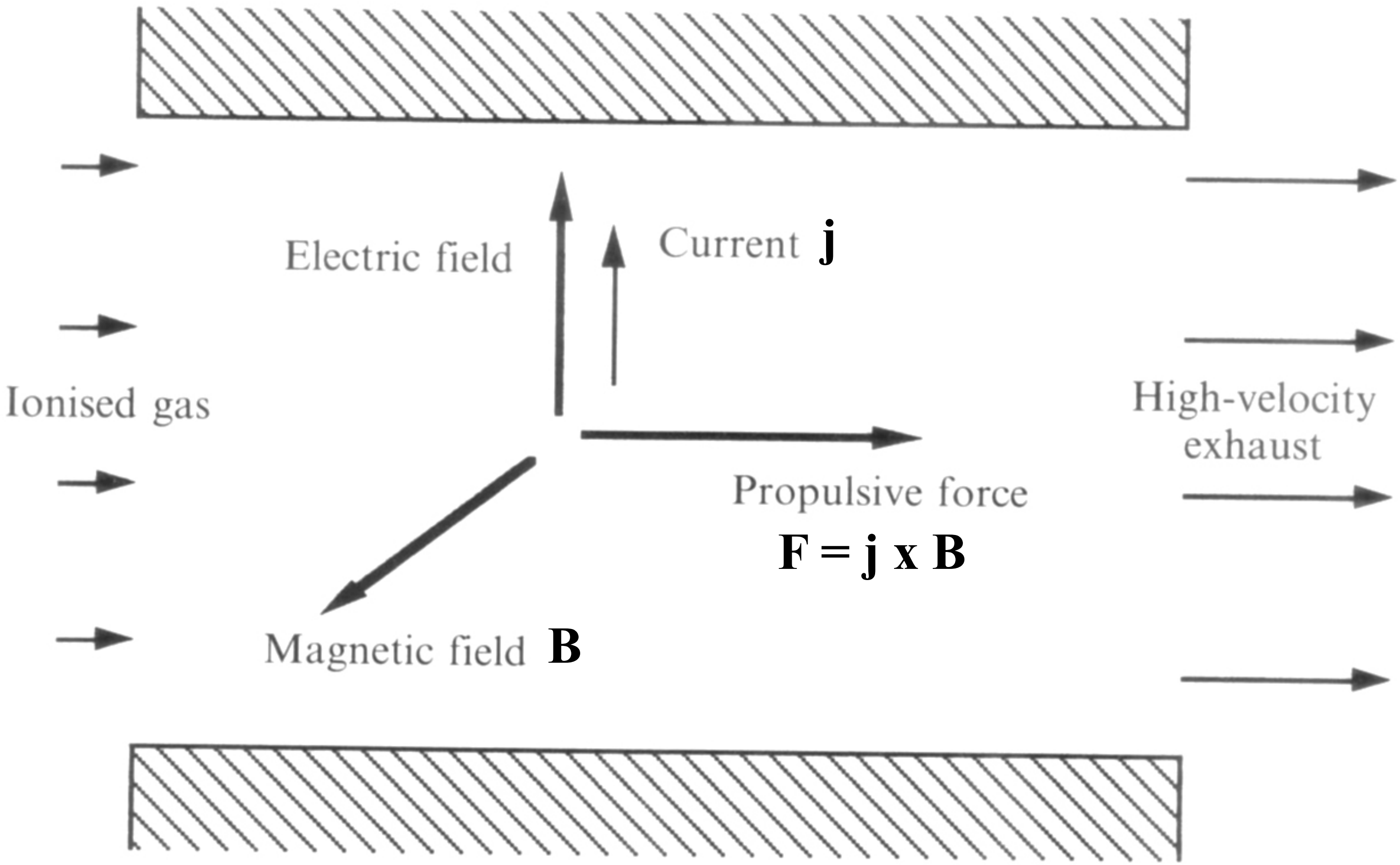
Ionenmotor: versnelling Xe-ionen tussen roosters, $v_e \sim 20$ km/s

Vb. NSTAR Deep Space 1 (asteroïde fly-by)

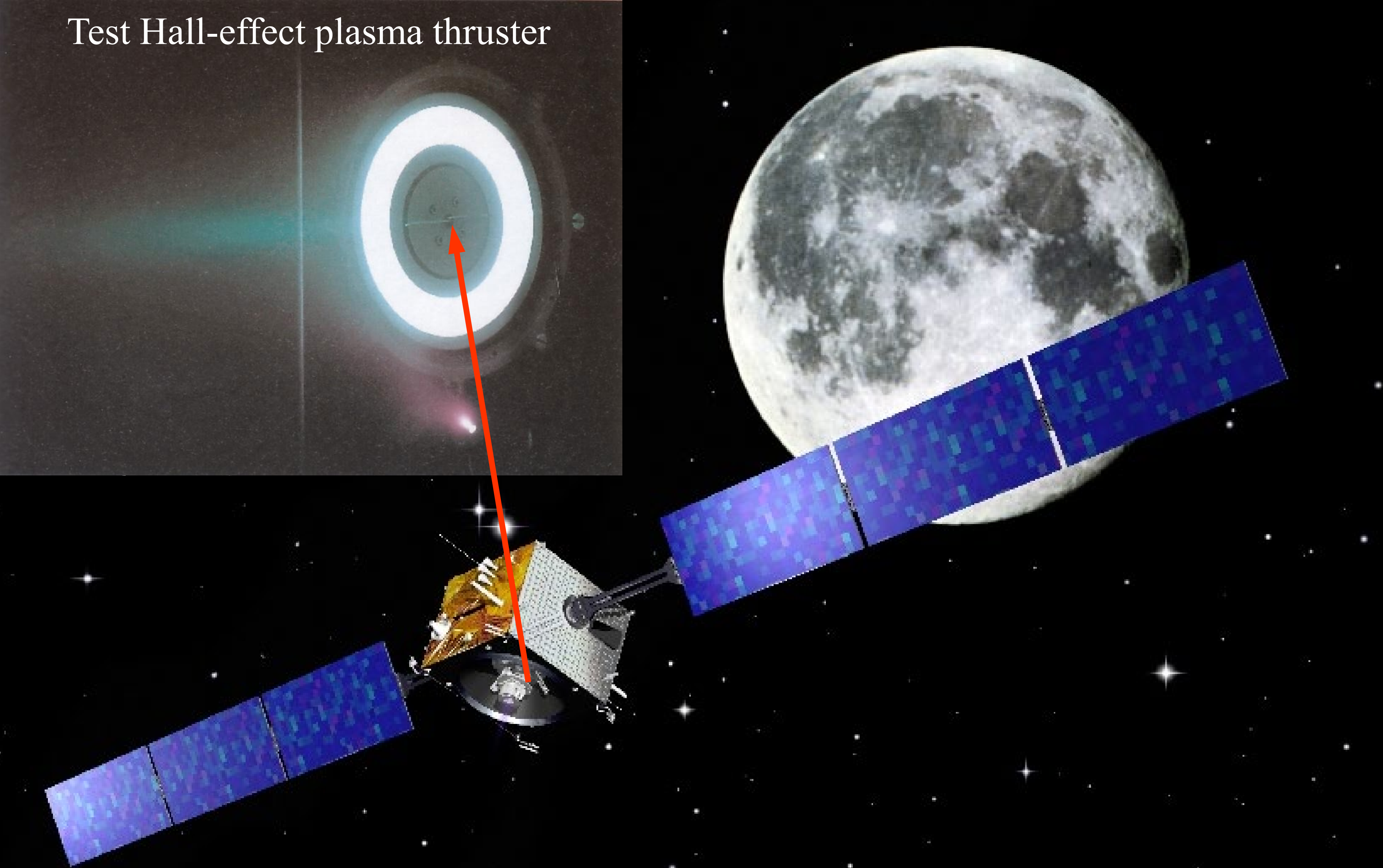
Test Xe-ionenmotor NSTAR voor Deep Space 1



Principe plasma thruster



Theorie (magneto-plasmadynamica) ontwikkeld voor het Russische ruimtevaartprogramma, met name de Hall-effect variant. Stuwgas Xe, $v_e \approx$ 15-25 km/sec, lage thrust 1 - 10 kW. Toegepast in SMART-1 (Maan)



SMART-1, 2003 – 2006 (controlled lunar impact).
Hall-effect plasma-thruster for lunar trajectory (ESA).

Smart-1 Hall-effect plasma-thruster

Comparison of propulsion technologies

	Chemical		Electric
	Small monopropellant thruster	Fregat Main Engine (S5.92M)	SMART-1 Hall Effect Thruster (PPS-1350)
Propellant	Hydrazine	Nitrogen tetroxide / Unsymmetrical dimethyl hydrazine	Xenon
Specific Impulse (s)	200	320	1640
Thrust (N)	1	1.96×10^4	6.80×10^{-2}
Thrust time (s)	1.66×10^5	877	1.80×10^7
Thrust time (h)	46	0.24	5000
Propellant consumed (kg)	52	5350	80
Total Impulse (Ns)	1.1×10^5	1.72×10^7	1.2×10^6

Fregat produces ~ 14 times the total impulse of SMART-1's engine, but uses nearly 70 times more propellant mass to do so. The hydrazine thruster produces less than a tenth as much total impulse while using 65% of the propellant mass.

Stuwkracht (“thrust”) en –vermogen

Enkele voorbeelden van het ontwikkelde stuwvermogen bij chemische aandrijving :

$$P = \frac{1}{2} F_R u_e \quad \Leftrightarrow \text{Ariane - 5 Upper Stage met 3,25 km/sec} \quad \rightarrow P \approx \text{ 45 MegaWatt}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ariana - 5 Vulcain - 2 met 4,00 km/sec} \quad \rightarrow P \approx \text{ 2,7 GigaWatt}$$

$$\Leftrightarrow \text{Space Shuttle Main Engine met 4,55 km/sec} \rightarrow P \approx \text{ 5,2 GigaWatt}$$

Dit stuwvermogen ligt ordes van grootte boven reeël leverbare electrische vermogens :

Stuwkracht met een 1 MW electrisch (zonne - energie) aangedreven ruimtesonde met

zonnepanelen : 3000 m^2 oppervlak (55 m lange zijde), massa 24 ton $\Rightarrow$

$$F_{SEP} = \frac{2P}{u_e} \rightarrow \text{met } u_e \approx 20\text{km/s} \Rightarrow F_{SEP} \approx 100 \text{ Newton!!}$$

Tijd om een bepaalde Δv te bereiken (u_e = constant) : $t = \dfrac{M_0 - M}{\dot{M}} = \dfrac{M_0 u_e}{F_R}(1 - \dfrac{M}{M_0})$

Vb. Invangst vanuit Mars - Aarde hyperbolische baan in cirkelbaan om Aarde : $\Delta v = 3{,}55$km/s

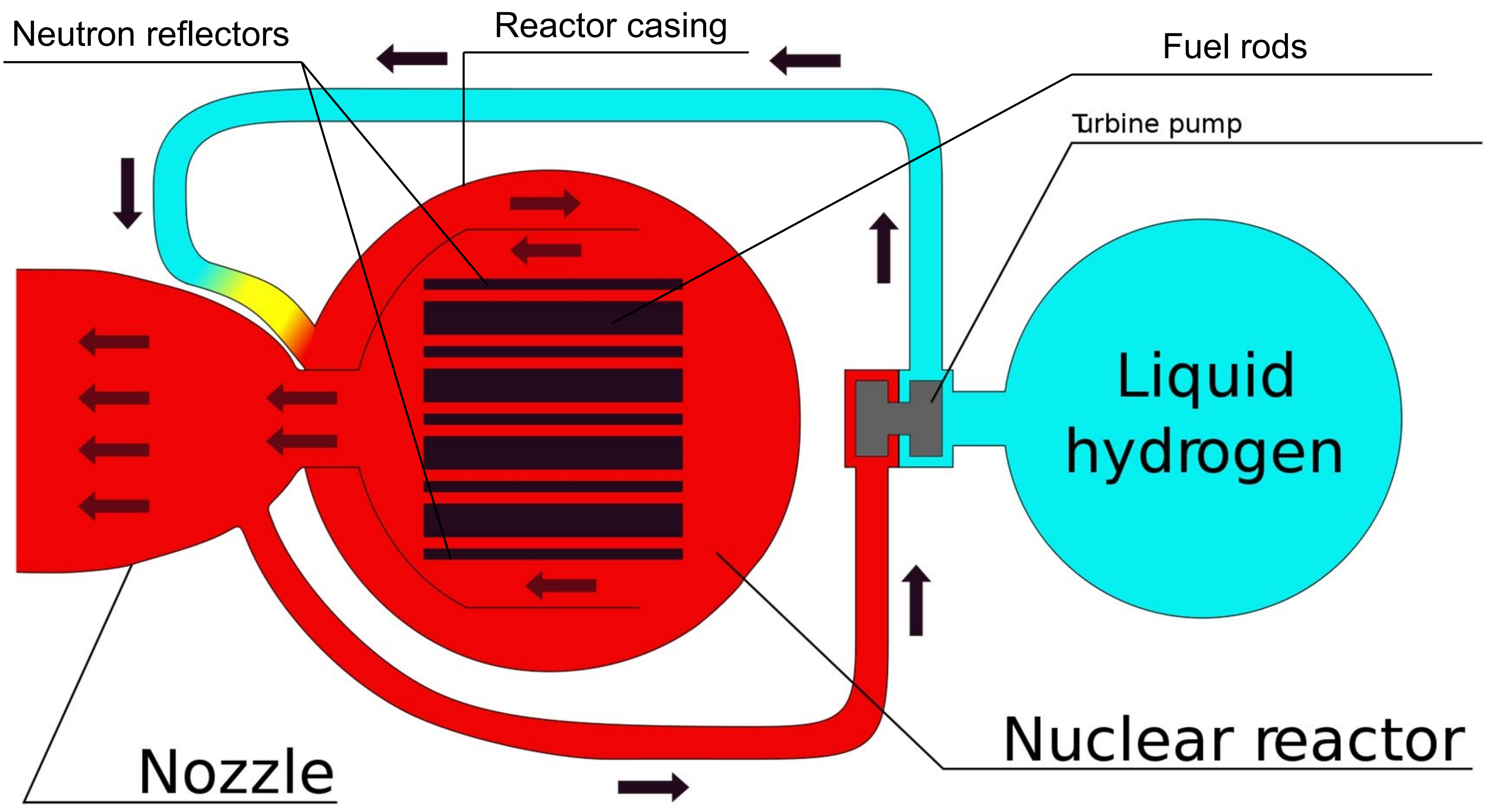
CHEMISCH : Aestus US $M_d \approx 70$ ton, $M_f \approx 139$ ton, $u_e = 3{,}24$km/s $\rightarrow t \approx 4{,}3$uur

SSME $M_f \approx 83$ ton, $u_e = 4{,}55$km/s $\rightarrow t \approx 165$sec

ELECTRISCH : Upgraded Xe - drive $M_f \approx 14$ ton, $u_e = 20$ km/s $\rightarrow t \approx 32{,}4$dagen

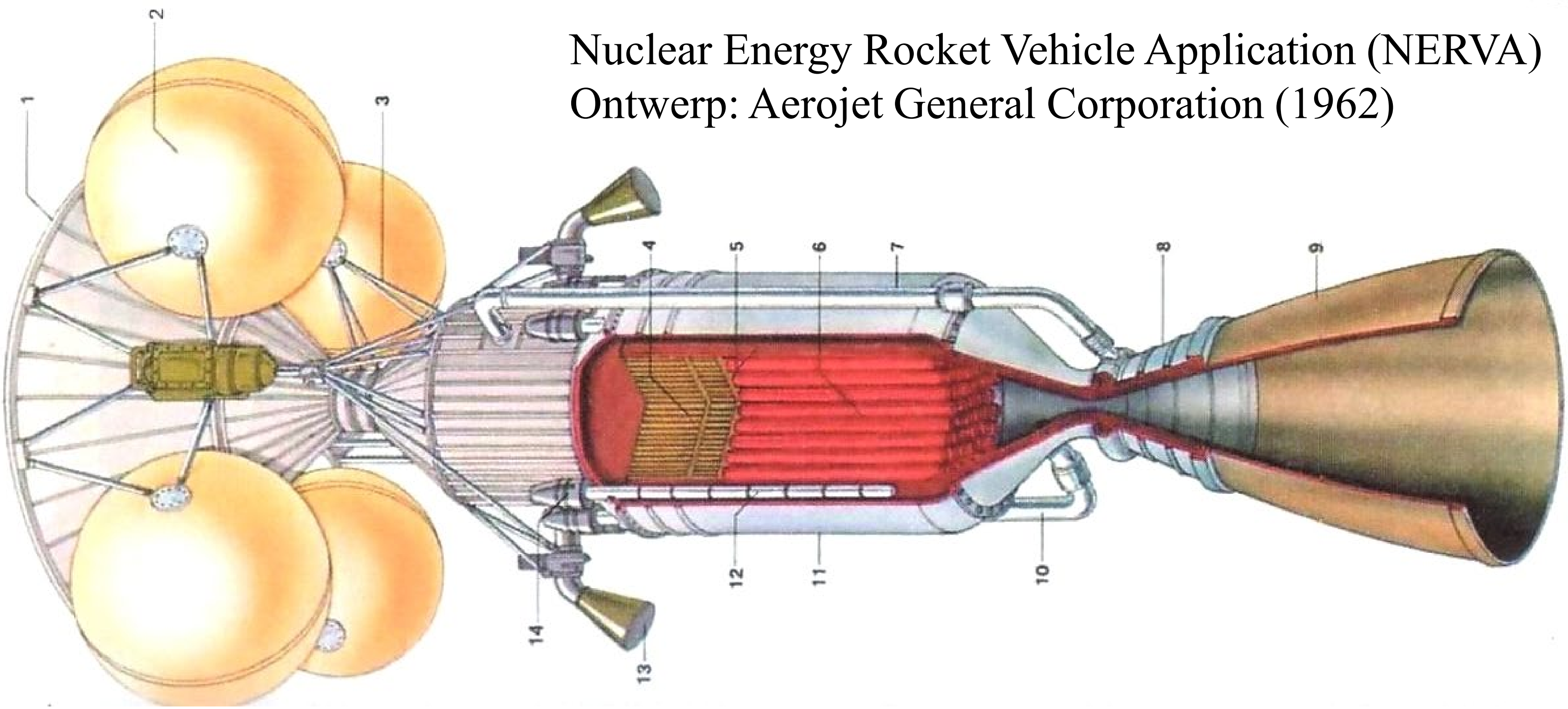
+ zonnepanelen $M_d \approx 94$ ton, $M_f \approx 18$ ton, $u_e = 20$km/s $\rightarrow t \approx 41{,}7$dagen !!

Raketmotor: nucleaire voortstuwing



Nucleair-thermische raketmotor

Nuclear Energy Rocket Vehicle Application (NERVA)
Ontwerp: Aerojet General Corporation (1962)



Vb. NDR (NERVA-derivative) door NASA/DOD (StarWars program).

Reactorkern: Uraniumcarbide (UC_2), Zirconiumcarbide (ZrC)

Mantel → $T_{RC} \approx$ 2500-3000K, RC-druk ≈ 65 bar, F=200-300 kNewton

Verhitting van H_2-brandstof (ook voor RC-koeling), $u_e \sim (T_{RC}/\mu_H)^{1/2}$

$u_e \approx$ 10 km/s

SSME: thermisch vermogen ↔ stuwvermogen

$$\text{Stuwvermogen } P_{\text{thrust}} = \frac{1}{2} F v_e \rightarrow \text{SSME : } F = 2{,}3\,\text{MN},\ v_e = 4550\,\text{m/s} : P_{\text{thrust}} \approx 5{,}2\ \text{GW}$$

Warmtemotor gevoed door kernreactor met thermisch vermogen $P_{\text{therm}} \Rightarrow$

maximaal nuttig effect voor omzetting naar arbeid volgens thermodynamica :

$$\eta = 1 - \frac{T_e}{T_c} \quad \text{(Carnot proces)}$$

T_c = verbrandings - of reactorkamertemperatuur

T_e = temperatuur van het uitstromende gas

De waarde van T_e/T_c bij operatie in vacuum wordt bepaald door de expansieverhouding A_e/A_{throat}.

Bij adiabatische expansie geldt :

$$\frac{T_e}{T_c} = \left(\frac{p_c}{p_e}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

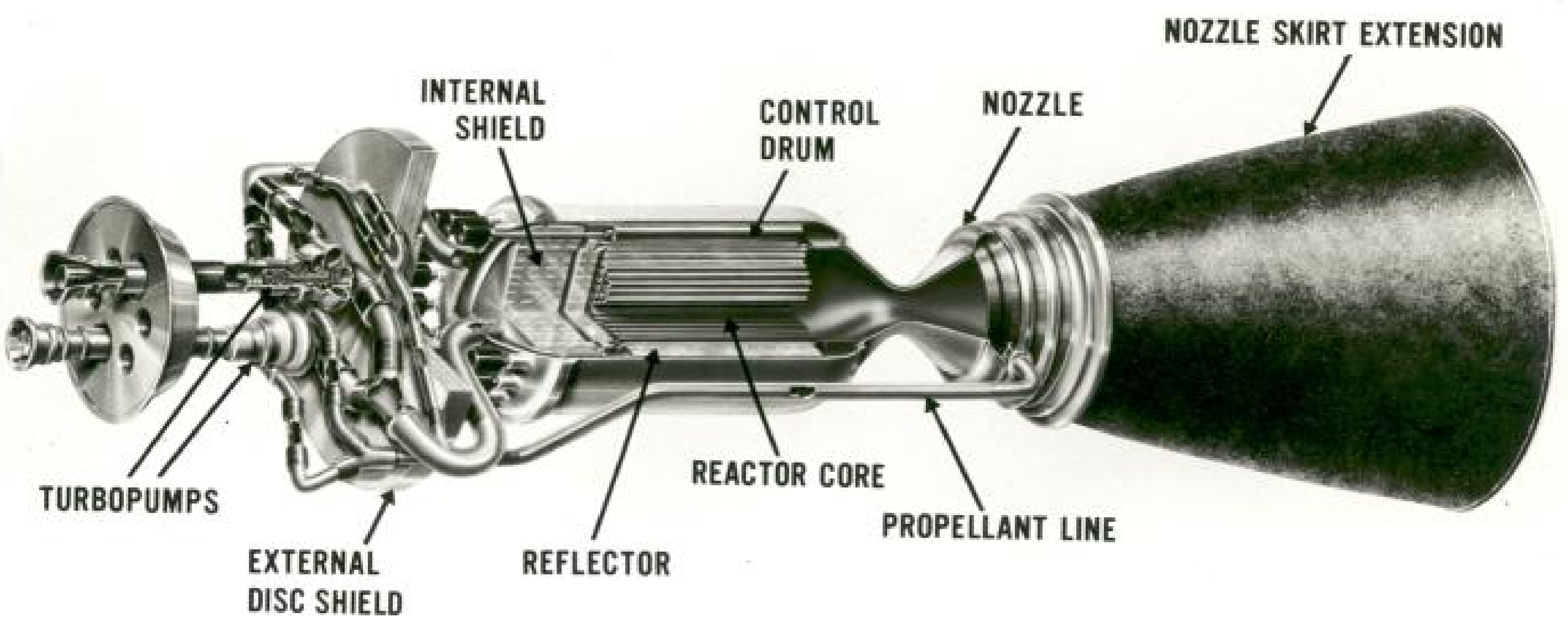
Voor $\gamma = 1{,}2$ levert de SSME bij een expansieverhouding van 80 :

$$\frac{p_c}{p_e} \approx 1000 \rightarrow \eta \approx 0{,}7 \rightarrow P_{\text{therm}} \approx 7{,}6\ \text{GW}$$

Prototype nucleaire reactor

NDR-motor: $P_{therm}(NDR) \approx 1{,}6$ GW $\rightarrow \approx \frac{1}{4} P_{therm}(SSME)$

$F = 346$ kNewton, $v_e = 9250$ m/sec, totale massa ≈ 15 ton



Stuwvermogen $P_{stuw} \approx 1{,}1 \times 10^9$ Watt ($\eta \approx 0{,}7$)

US bemande vluchten naar ISS vanaf 2017

7-seater

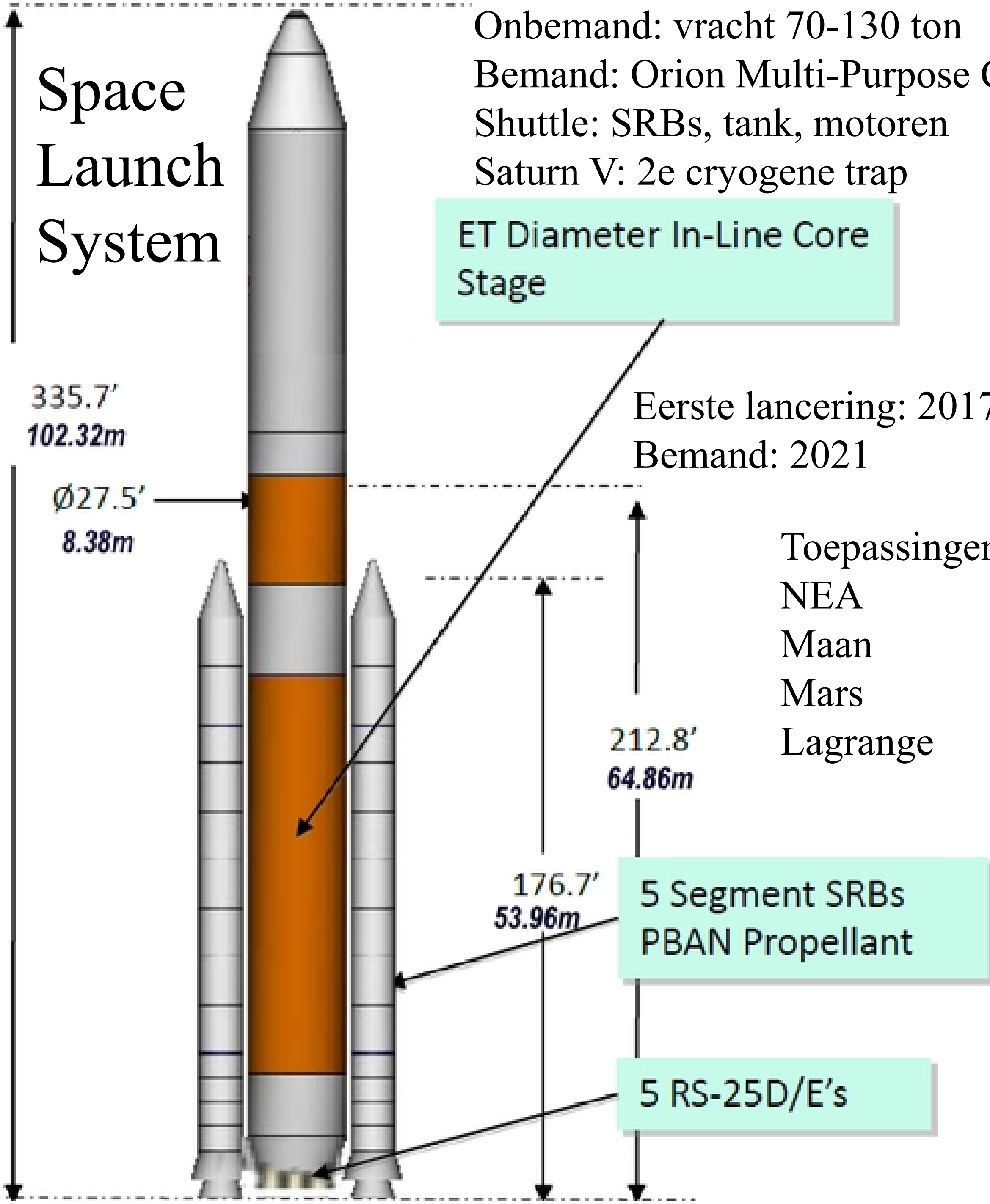
SpaceX: Dragon-2

7-seater

Boeing CST-100

Space Launch System

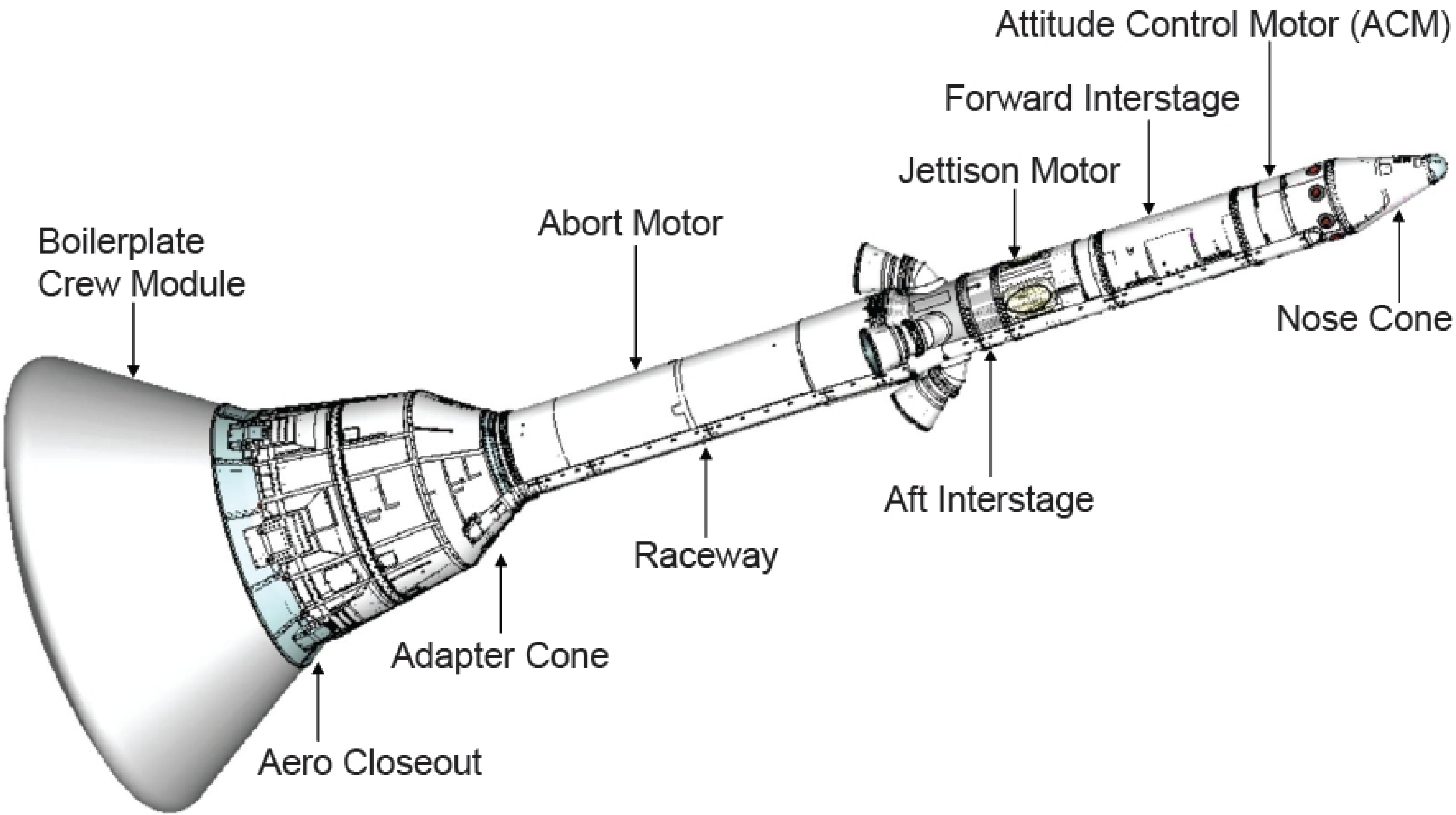
Onbemand: vracht 70-130 ton
Bemand: Orion Multi-Purpose CV
Shuttle: SRBs, tank, motoren
Saturn V: 2e cryogene trap



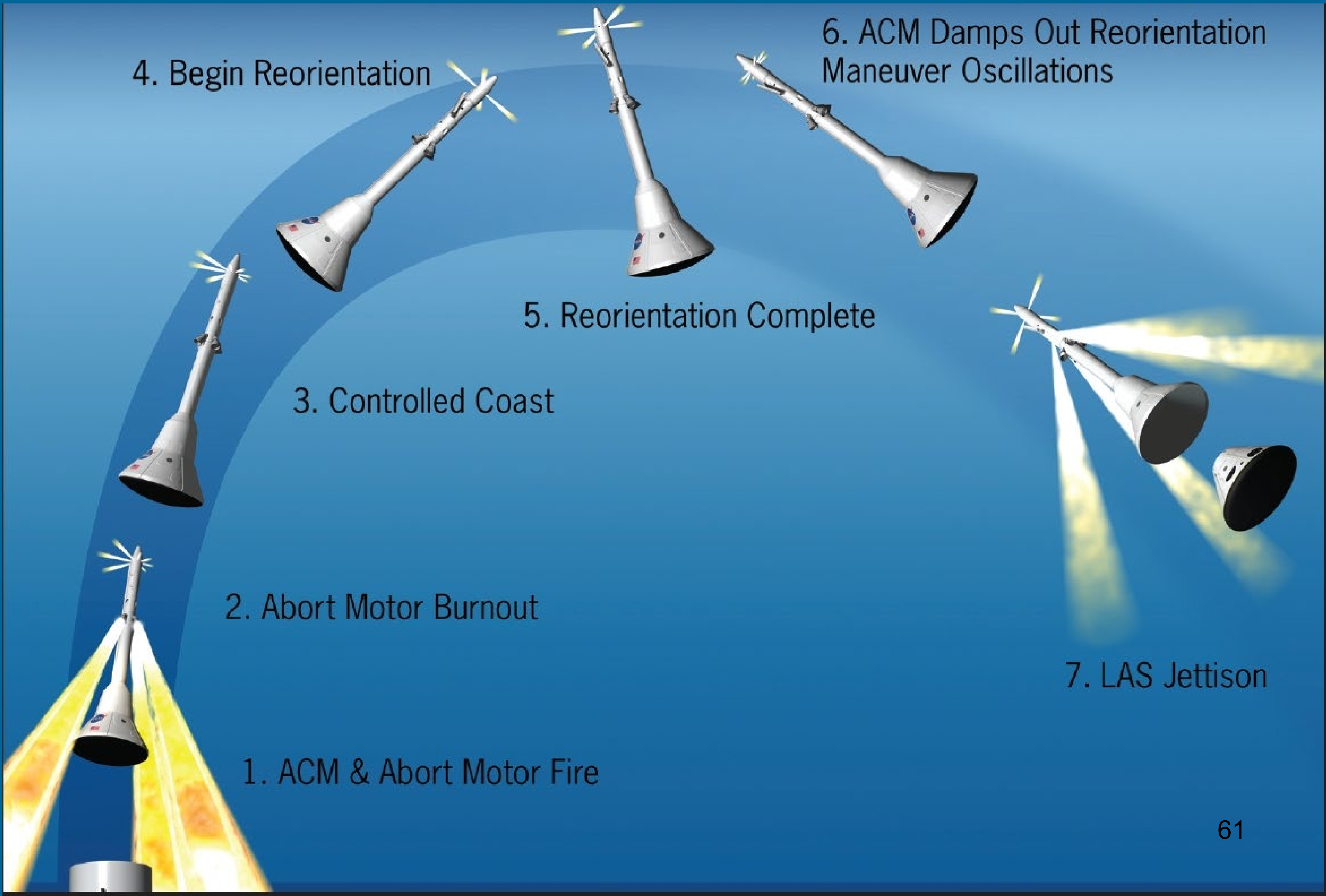
Eerste lancering: 2017
Bemand: 2021

Toepassingen:
NEA
Maan
Mars
Lagrange

Orion crew capsule Launch Abort System (LAS)



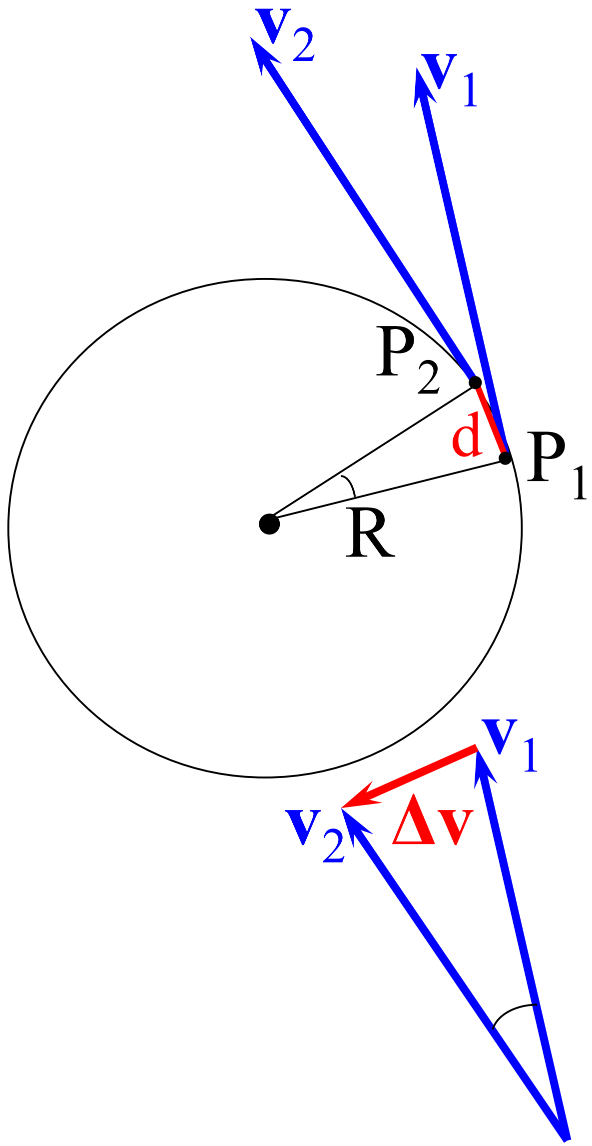
Launch Abort operational sequence



De natuurkunde van ruimtereizen

- Astrodynamica
- Voorbeeld: bemande missie naar Mars

Cirkelbeweging in een centraal krachtenveld: de centripetale versnelling **a**

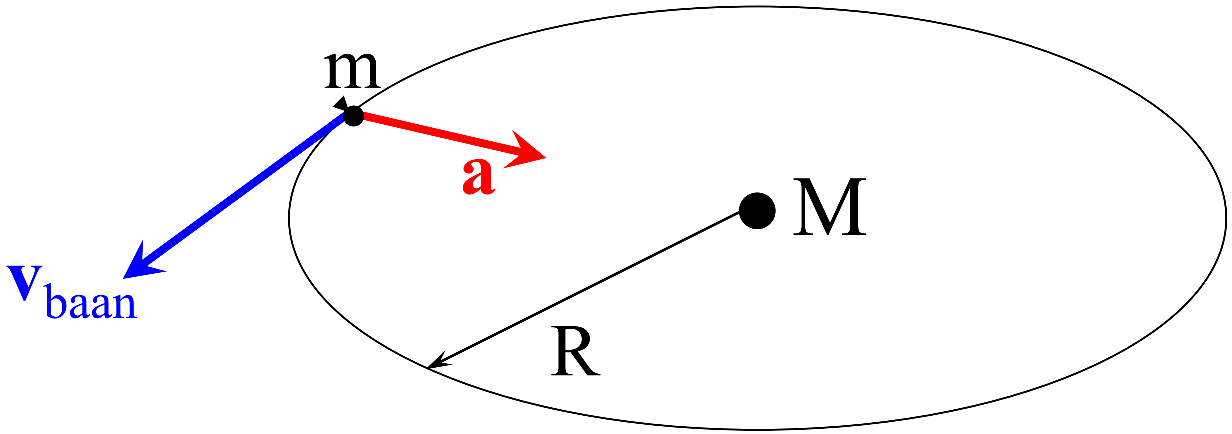


$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = \mathrm{v}$$

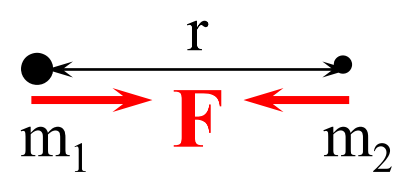
$$\frac{\Delta \mathrm{v}}{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{R}}$$

$$|\mathbf{a}| = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{R}}\mathrm{v} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}}$$

Cirkelbeweging van een stoffelijk punt m om een centrale massa M (m≪M): de baansnelheid $\mathbf{v}_{baan}$



Gravitatiewet:



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

$|\mathbf{F}| = F, |\mathbf{v}| = v, |\mathbf{a}| = a, |\mathbf{r}| = r$

$$G = 6{,}67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$$

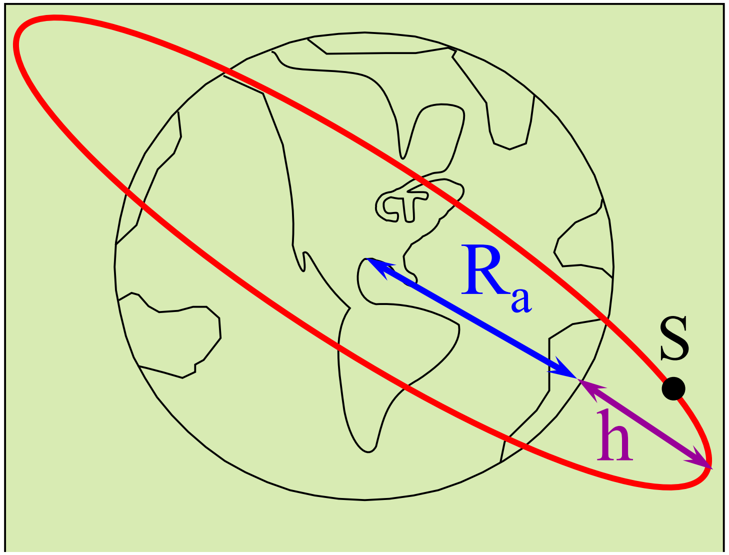
$$\rightarrow F = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$\rightarrow G\frac{Mm}{R^2} = ma = m\frac{v^2}{R}$$

$$\rightarrow G\frac{M}{R^2} = \frac{v^2}{R} \qquad \rightarrow |\mathbf{v}_{baan}| = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2}$$

De baanperiode voor een circulaire baan: T

Satelliet in lage baan:
$R_a = 6400$ km
$h = 500$ km
$T = 5684$ sec
≈ 95 min



Maan:
$R_a = 6400$ km
$h = 378000$ km
$T = 2{,}36 \cdot 10^6$ sec
$\approx 27{,}3$ dagen

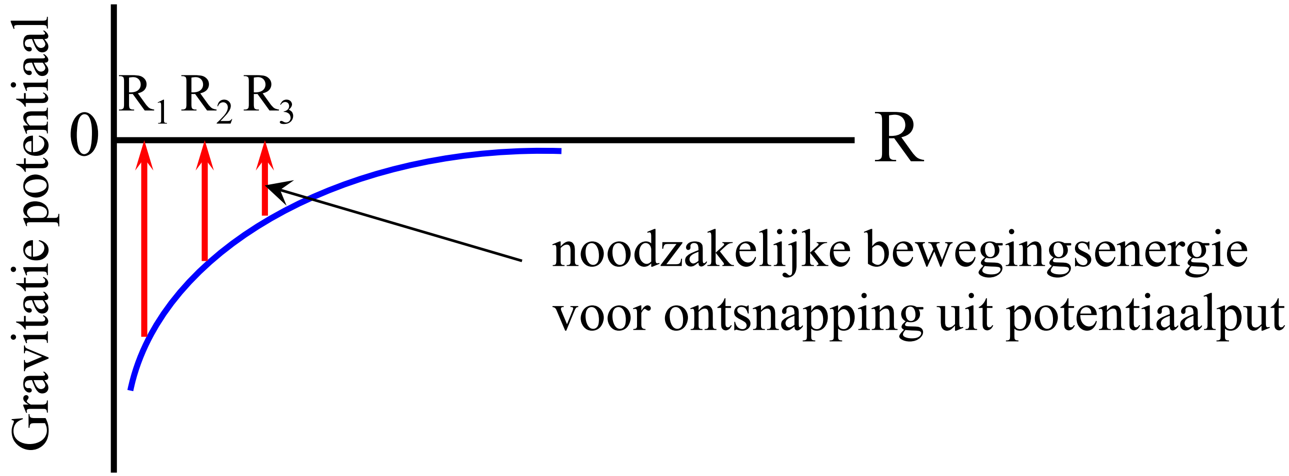
$$v = \frac{2\pi R}{T} \rightarrow \frac{GM}{R^2} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \frac{1}{R}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3 \quad \text{(derde wet van Kepler)}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} (R_a + h)^3, \text{ met } \frac{1}{M} = \frac{G}{g{R_a}^2}$$

$$\rightarrow T = 2\pi \left(1 + \frac{h}{R_a}\right) \left(\frac{R_a + h}{g}\right)^{1/2}, \quad g = 9{,}8 \text{ m.sec}^{-2}$$

De ontsnappingssnelheid: v_e



Energiebehoud (afgesloten system):

$$\tfrac{1}{2} m v_e^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0$$

$$\rightarrow v_e = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2}$$

Vanaf het aardoppervlak:

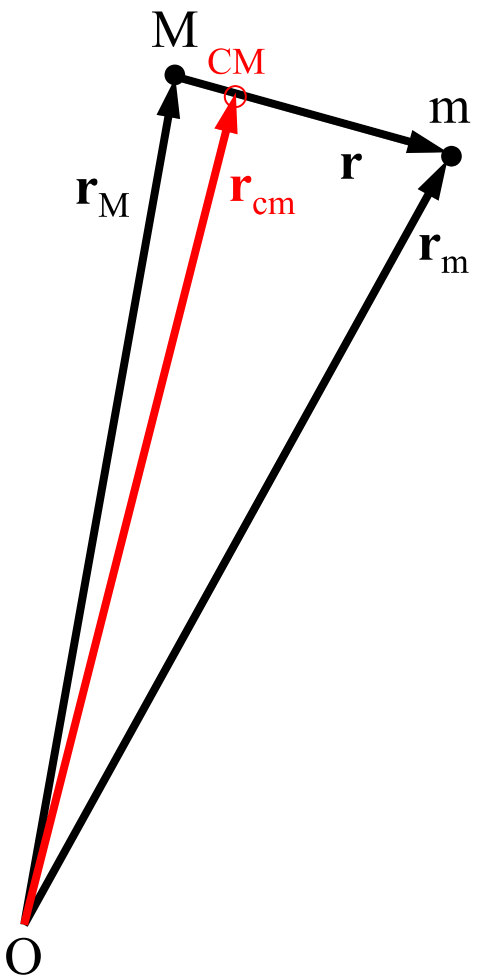
$$R = R_0 = 6400 \text{ km} \rightarrow v_e = 11{,}2 \text{ km/sec}$$

Op willekeurige positie R:

$$v_e = v_{cirkelbaan} \cdot \sqrt{2}$$

De tweelichamen-bewegingsvergelijking onder invloed van de zwaartekracht ("two-body equation of motion")

Bewegingsvergelijking voor een ruimtevaartuig met massa m (plaatsvector $\mathbf{r}_m$) in het veld van een centraal aantrekkingslichaam met massa M (plaatsvector $\mathbf{r}_M$):



Pas de tweede wet van Newton toe om de versnelling van M en m tengevolge van de gravitatiepotentiaal te berekenen:

$$M\ddot{\mathbf{r}}_M = \frac{GMm}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|^2} \cdot \frac{(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M)}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M|} \quad (1)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_m = \frac{GMm}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m|^2} \cdot \frac{(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m)}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m|} \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{(m\mathbf{r}_m + M\mathbf{r}_M)}{m+M}$$

Optellen van (1) en (2): $\frac{d^2}{dt^2}(m\mathbf{r}_m + M\mathbf{r}_M) = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\mathbf{r}}_{cm} = 0$

$\Rightarrow$ $\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2$ is niet onderhevig aan versnelling $\Rightarrow$ massamiddelpunt (cm) is oorsprong van een inertiaal stelsel.

De vergelijking voor de relatieve beweging van M en m

De relatieve positie van het ruimtevoertuig (m) t.o.v. het aantrekkingslichaam (M) wordt gegeven door de vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_M$.
Vergelijking (1) aftrekken van vergelijking (2) en substititie met **r** geeft:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} = 0 \qquad \mu = G(M + m) = \text{gravitatieparameter}$$

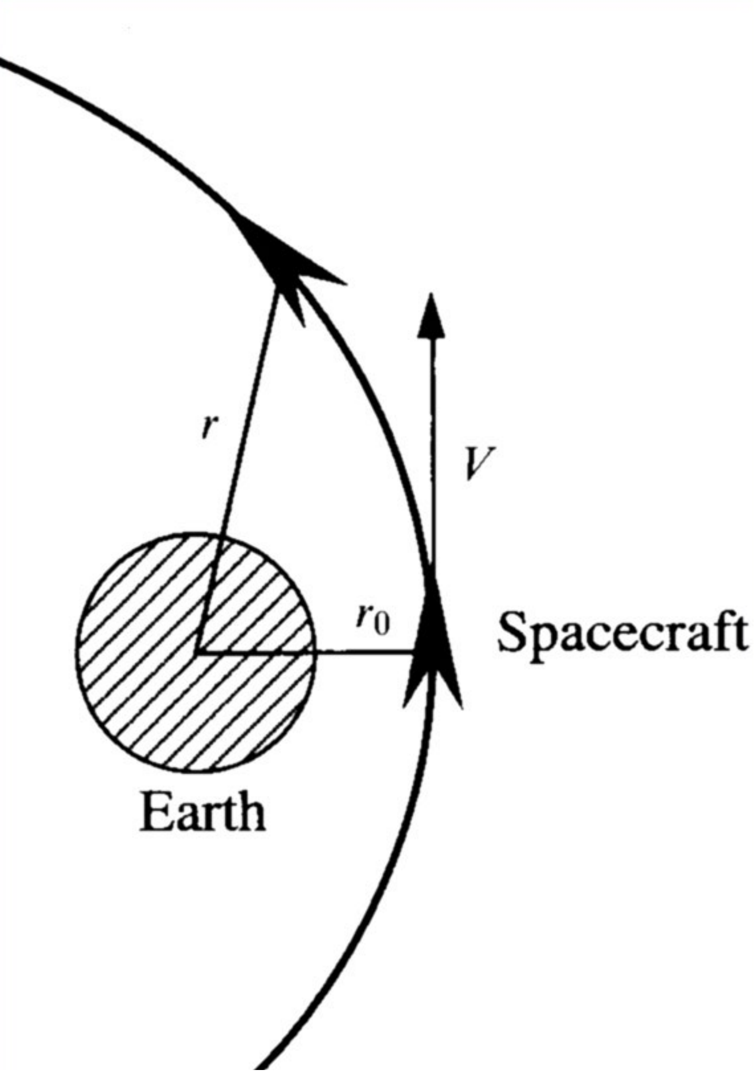
Dit is de tweelichamen-vergelijking voor de relatieve beweging van het ruimtevoertuig (m) en het aantrekkinglichaam (M) t.o.v. elkaar.
Wiskundig is deze beschrijving identiek met de beweging van een deeltje met gereduceerde massa $m_r = Mm\,/(M{+}m)$ in een radiaal gericht centraal-krachtenveld met sterkte $GMm/|\mathbf{r}|^2$. De centraal-krachtenveld en de tweelichamen-formulering zijn dus equivalent. Voor het hier beschreven geval geldt dat de massa van het ruimtevoertuig verwaarloosbaar is t.o.v. van de massa van het aantrekkingslichaam:
Met $m \ll M$ ⇨

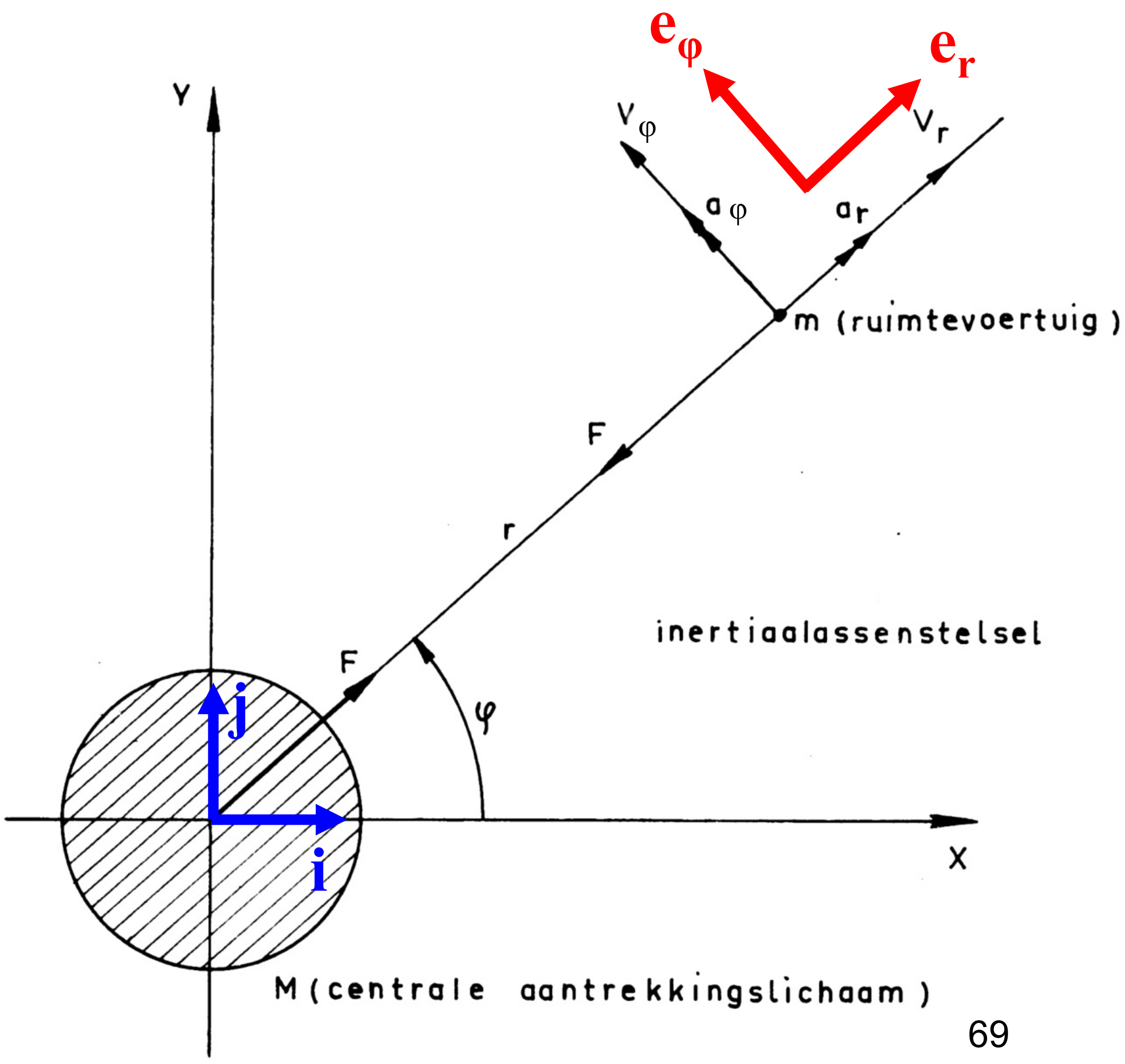
$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{GM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} = 0$$

Integratie over weglengte **r** levert de energievergelijking:

$$\int \ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \int \frac{GM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = ½|\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{GM}{|\mathbf{r}|} = C$$

Oplossing algemene bewegingsvergelijking in poolcoordinaten





Oplossingsmethodiek

$\mathbf{r} = |\mathbf{r}|\cos\varphi\ \mathbf{i} + |\mathbf{r}|\sin\varphi\ \mathbf{j} = r\cos\varphi\ \mathbf{i} + r\sin\varphi\ \mathbf{j}$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = [\dot{r}\cos\varphi - (r\sin\varphi)\dot{\varphi}]\ \mathbf{i} + [\dot{r}\sin\varphi + (r\cos\varphi)\dot{\varphi}]\ \mathbf{j}$

Voer de volgende eenheidsvectoren in:

$\mathbf{e}_r = \cos\varphi\ \mathbf{i} + \sin\varphi\ \mathbf{j}$ in de richting van toenemende r (radiële component)

$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\ \mathbf{i} + \cos\varphi\ \mathbf{j}$ in de richting van toenemende φ (tangentiële component)

$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\ \mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\ \mathbf{e}_\varphi$

$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\ \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\ \mathbf{e}_\varphi$

Omdat $\mathbf{a}$ en $\mathbf{e}_r$ tegengesteld langs $\mathbf{r}$ zijn gericht ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_r/|\mathbf{a}| = -1$) geldt:

$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + GM/r^2 = 0$ en

$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \rightarrow r^2\dot{\varphi} = \text{constant} = |\boldsymbol{\ell}|$

$|\boldsymbol{\ell}|$ is de grootte van het draai-impulsmoment $\boldsymbol{\ell}$ per eenheid van massa $\rightarrow \dot{\varphi} = |\boldsymbol{\ell}|/r^2$

Substitutie van $\dot{\varphi}$ levert een differentiaalvergelijking voor r als functie van t:

$$\ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}, \text{ met } \frac{d}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi} \rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{r} = -\frac{GM}{\ell^2},$$

los op via $u = 1/r$:

$$r = \frac{\ell^2/(GM)}{1+\left(\frac{\lambda\ell^2}{GM}\right)\cos(\varphi-\varphi_0)}$$ (λ, φ_0 nader te bepalen constanten)

De kegelsneden r en baanexcentriciteit ε

Kies voor de beginfase $\varphi_0=0$, voor het periapsispunt r_p van de baan geldt $\varphi=0$.
Normering van r op r_p geeft:

$r/r_p = \frac{1+\lambda\ell^2/(GM)}{1+\left(\frac{\lambda\ell^2}{GM}\right)\cos\varphi}$, met de excentriciteit $\varepsilon = \left(\frac{\lambda\ell^2}{GM}\right) \rightarrow \quad r/r_p = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

De waarde van de constante λ kan worden afgeleid uit de energievergelijking:

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-\frac{GM}{r} = \text{constant} = W(\text{totale energie})$$

Met $u = 1/r$ en $\frac{d}{dt}=\dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi}$ kan de totale energie W worden uitgedrukt in u, φ en ℓ:

$W = \frac{1}{2}\ell^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\ell^2u^2 - GMu$, invullen van u en $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)$ leidt tot de waarde van λ:

$\lambda = \frac{1}{\ell}\left(2W + \frac{(GM)^2}{\ell^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ en voor $\varepsilon = \left(\frac{\lambda\ell^2}{GM}\right) = \left(1 + 2W\left(\frac{\ell}{GM}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Voor het periapsis (perigeum) punt geldt: $\ell = r_p v_p$ en $W = \frac{1}{2}{v_p}^2-\frac{GM}{r_p}$, er volgt voor

$\varepsilon = \left(\frac{r_p {v_p}^2}{GM} - 1\right)$ en $r = \frac{\ell^2/(GM)}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, met $a = r_p/(1-\varepsilon)$

De baansnelheid v: de vis-viva vergelijking

Vergelijking van energiebehoud zegt:

$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}{v_p}^2 - \frac{GM}{r_p}$, substitutie met:

$r_p = a(1 - \varepsilon)$ en

$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a}}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$ (volgt uit uitdrukking voor ε) $\rightarrow$

$W = \text{specifieke baanenergie} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$ $\rightarrow$

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \text{ (vis-viva vergelijking)}$$

- De specifieke baanenergie W (energie per eenheid van massa van de satelliet) hangt alleen af van de halve-lange-as a.
- De baansnelheid v hangt slechts af van de actuele waarde van r en de halve-lange-as a van de kegelsnede.

Algemene oplossing van de bewegingsvergelijking in centrale-kracht velden in (r,φ)-coordinaten

Oplossing van de bewegingsvergelijking levert kegelsneden voor de gevolgde banen p die, uitgedrukt in poolcoördinaten als volgt kunnen worden geschreven:

$$\frac{r}{r_p} = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$ met excentriciteit $$\varepsilon = \left(\frac{r_p v_p^{\,2}}{GM} - 1\right)$$

$\varepsilon = 0$ cirkelbaan

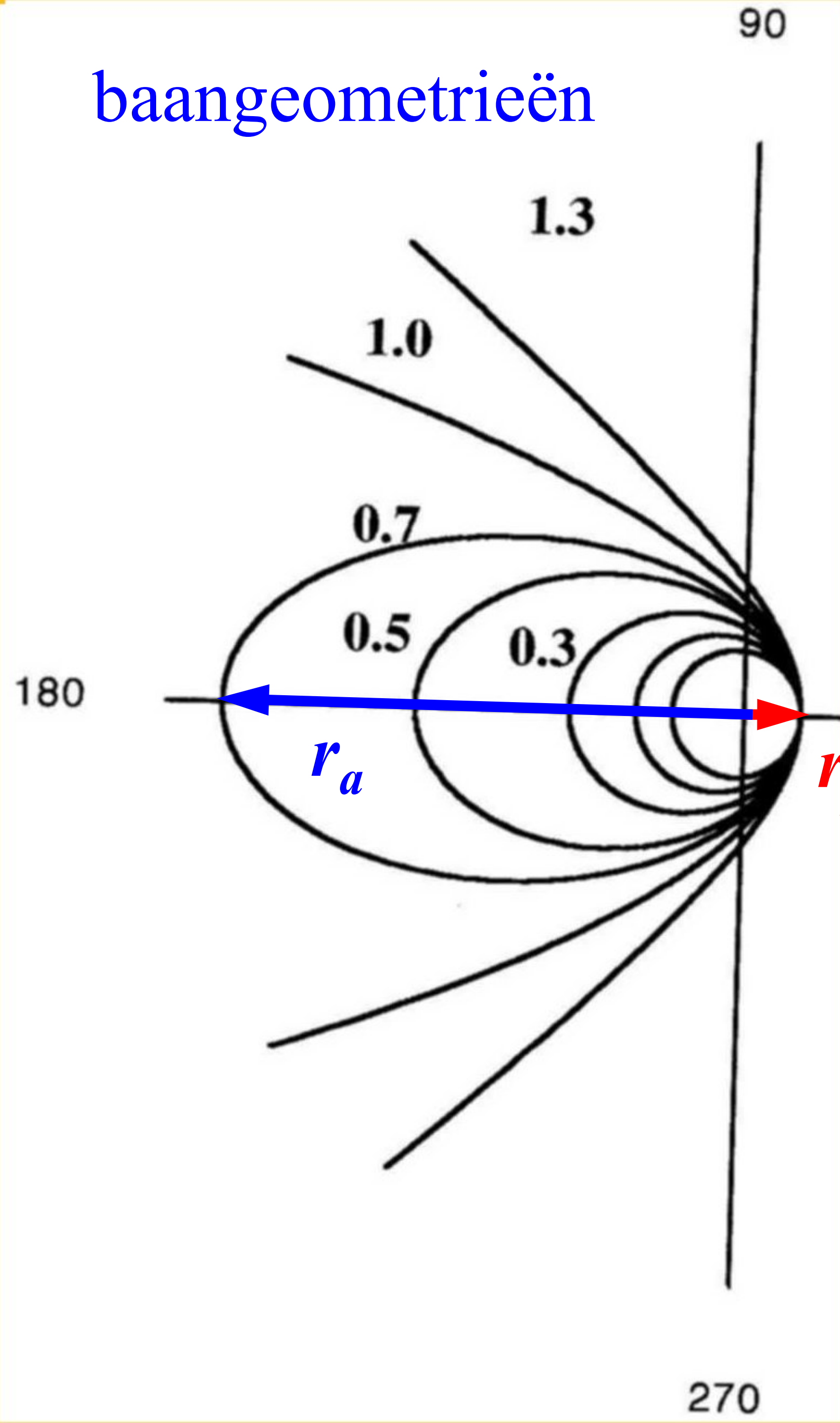
$0 < \varepsilon < 1$ ellipsbaan

$\varepsilon = 1$ parabolische baan

$\varepsilon > 1$ hyperbolische baan

r_p, v_p = periapsis-afstand, snelheid .

baangeometrieën



baansnelheden in perigeum

Circulaire baan:

$$v_p = v_c = \sqrt{GM/r_p}$$

Parabolische baan:

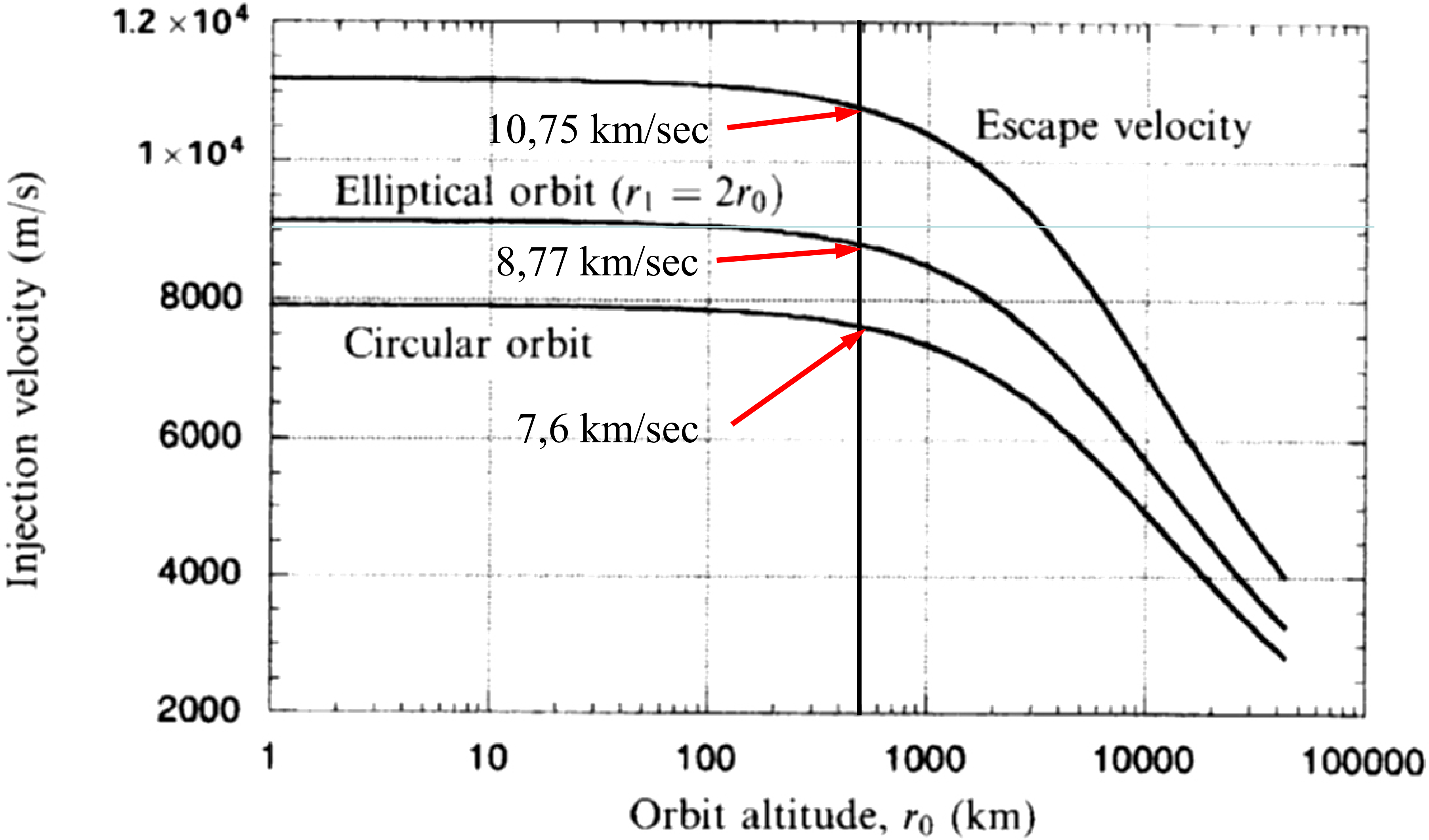
$$v_p = \sqrt{2GM/r_p}$$

Elliptische baan:

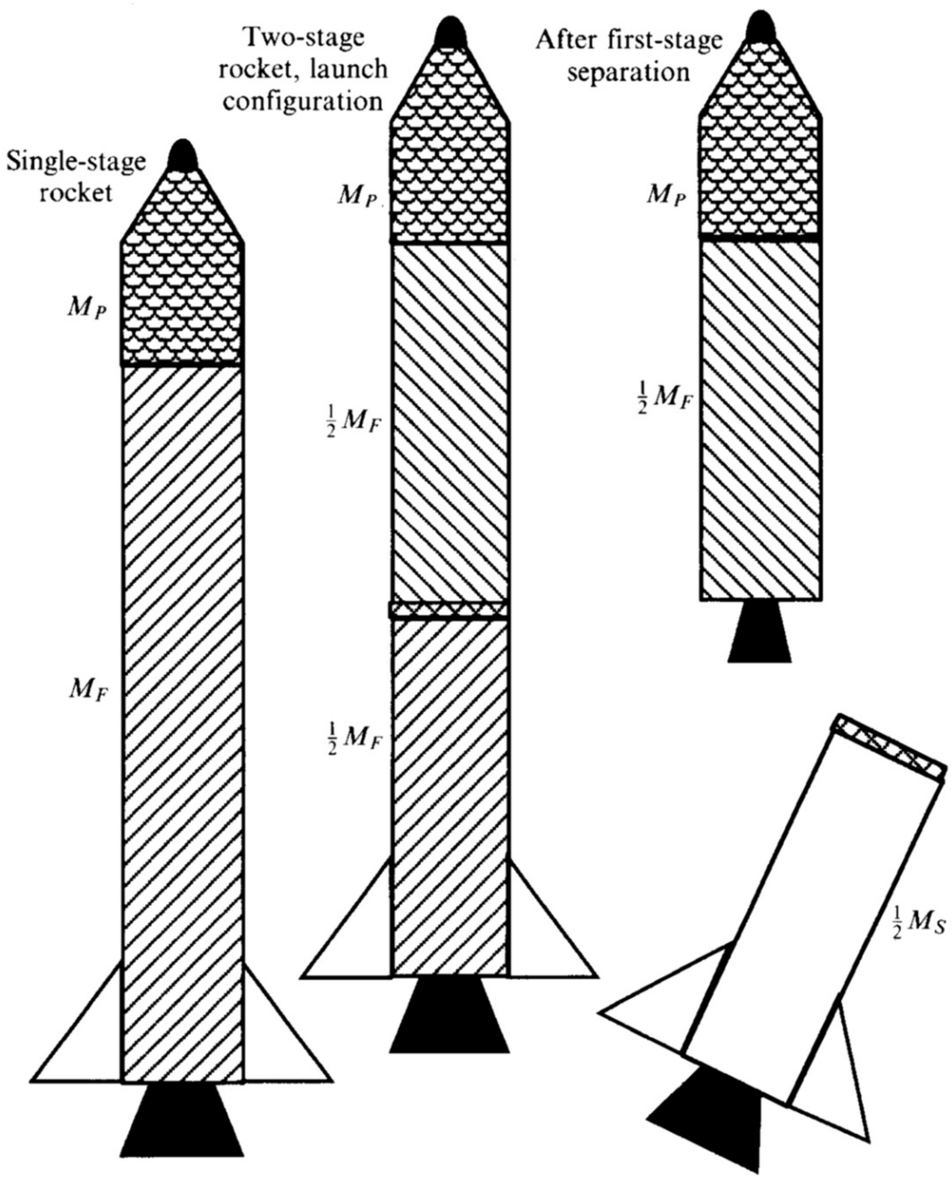
$$\frac{v_p}{v_c} = \sqrt{1 + \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}}$$

$$\frac{v_a}{v_p} = \frac{r_p}{r_a}$$

Injectie snelheden ↔ baanhoogte (perigeum)



Δv-winst bij meertrapsaandrijving



Raketvergelijkingen:

Eentraps- massaverhouding:

$R_0 = (M_s+M_f+M_p) / (M_s+M_p)$

Tweetraps-massaverhoudingen:

$R_1 = (M_s+M_f+M_p) / (M_s+½M_f+M_p)$

$R_2 = (½M_s+½M_f+M_p) / (½M_s+M_p)$

Snelheden:

$v_{1traps} = u_e \; ln \; R_0$

$v_{2traps} = u_e \; ln \; R_1 + u_e ln \; R_2$

Voorbeeld:

Raket (incl. payload) = 100 ton

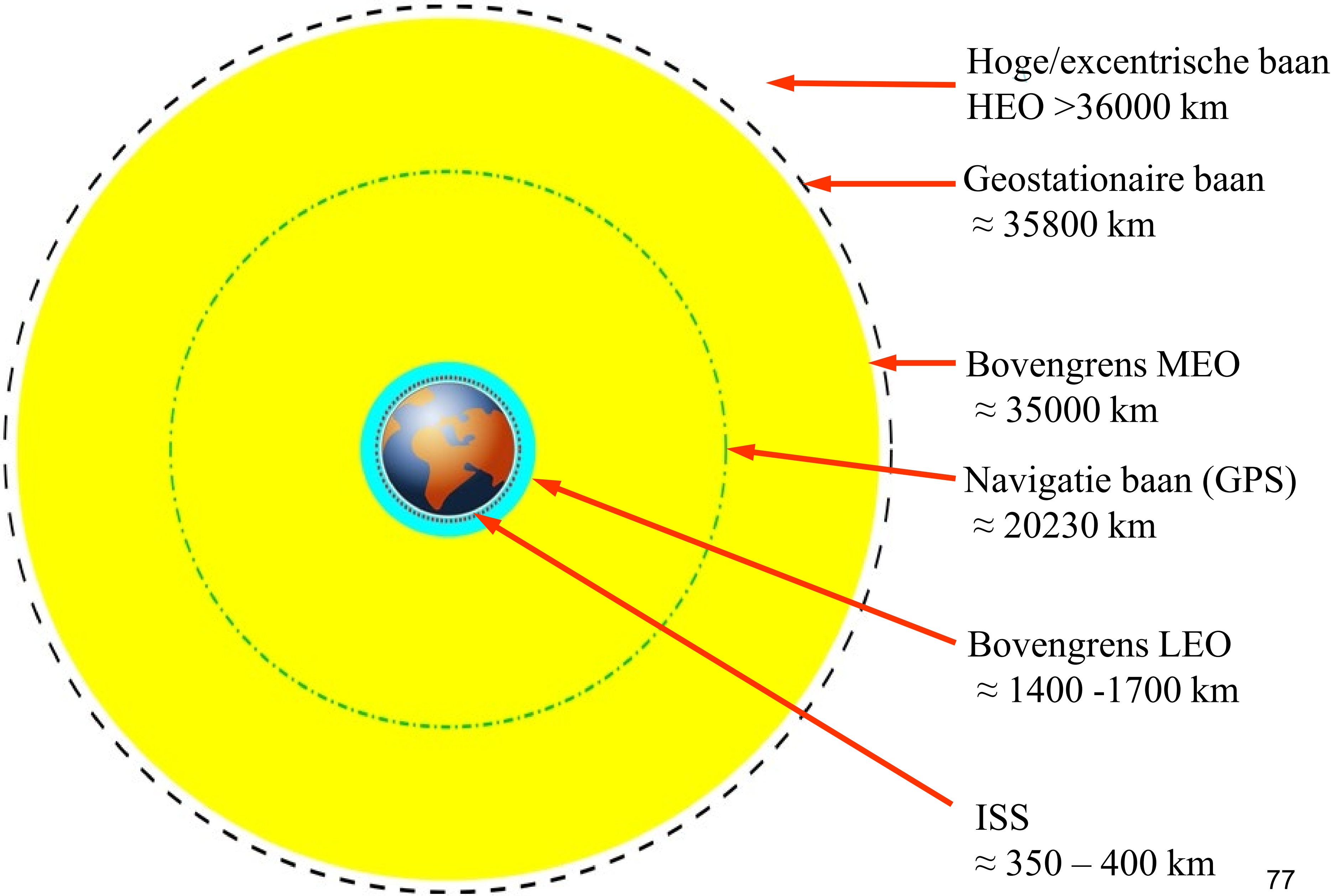
satelliet 1 ton, $M_s = 0{,}1 \; M_f$

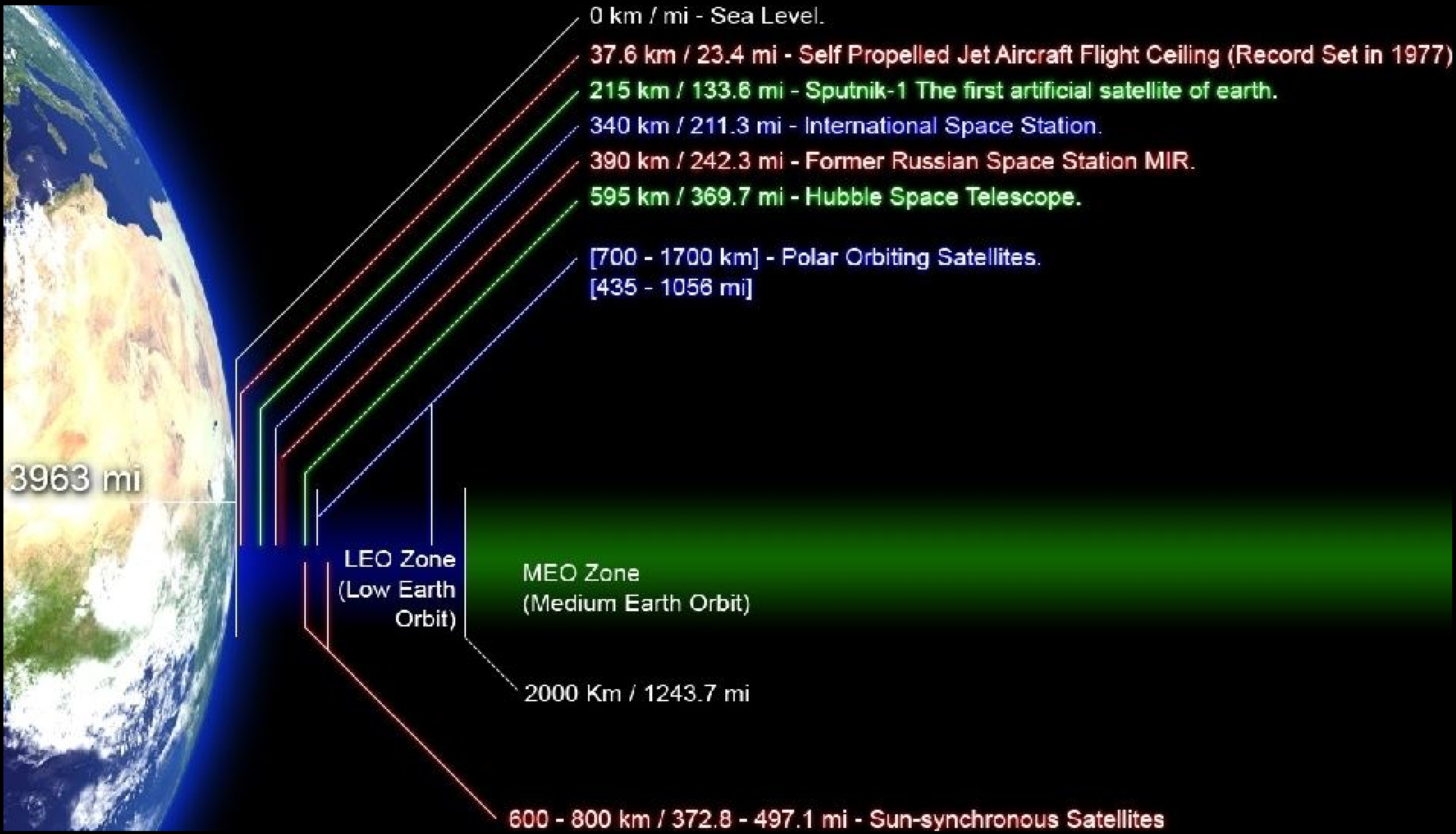
$u_e = 2{,}7$ km/sec →

$v_{1traps} = 6{,}22$ km/sec

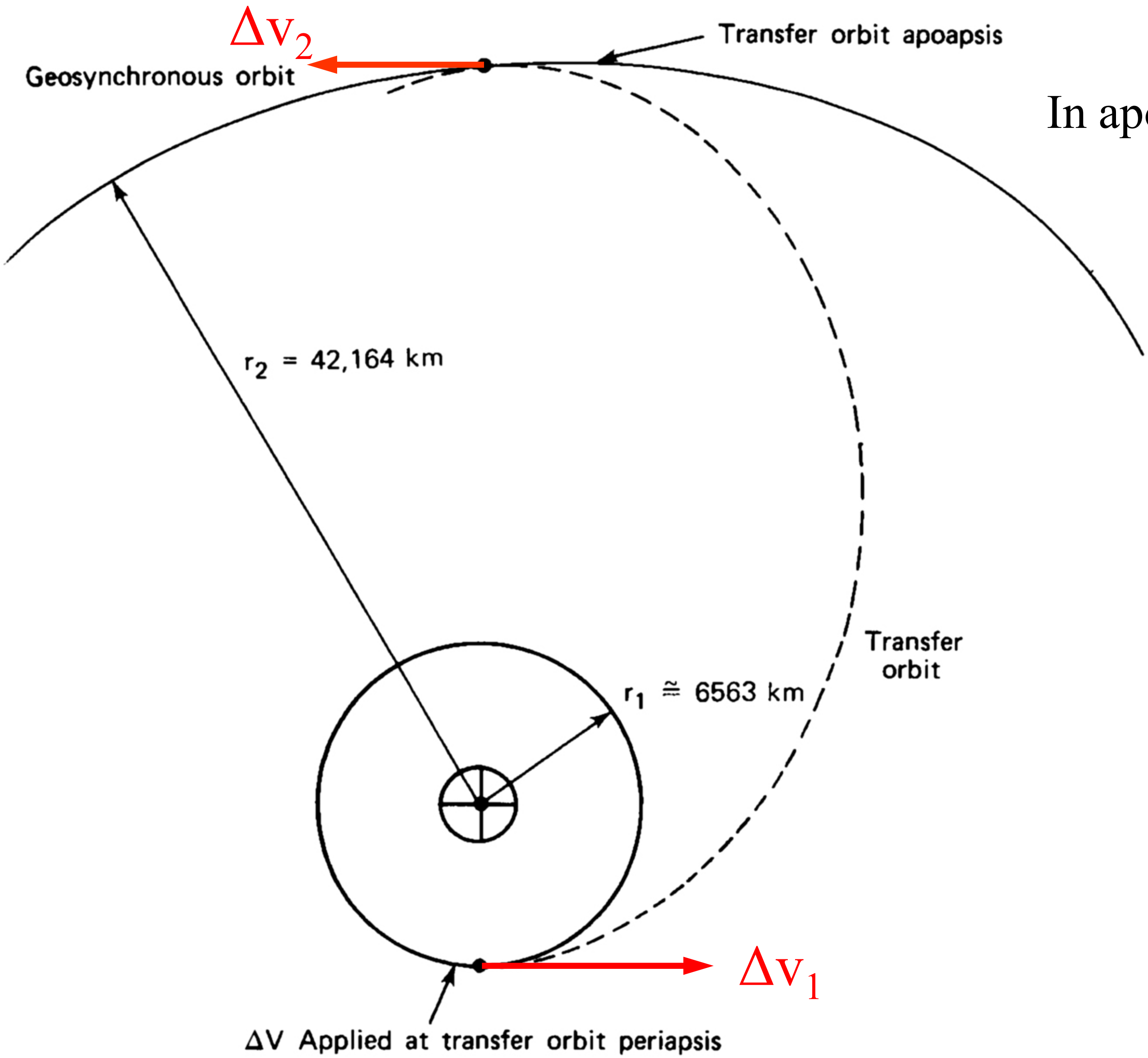
$v_{2traps} = 1{,}61 + 5{,}99 = 7{,}60$ km/sec

Baanindeling naar hoogte




0 km / mi - Sea Level.
37.6 km / 23.4 mi - Self Propelled Jet Aircraft Flight Ceiling (Record Set in 1977)
215 km / 133.6 mi - Sputnik-1 The first artificial satellite of earth.
340 km / 211.3 mi - International Space Station.
390 km / 242.3 mi - Former Russian Space Station MIR.
595 km / 369.7 mi - Hubble Space Telescope.
[700 - 1700 km] - Polar Orbiting Satellites.
[435 - 1056 mi]
3963 mi
LEO Zone (Low Earth Orbit)
MEO Zone (Medium Earth Orbit)
2000 Km / 1243.7 mi
600 - 800 km / 372.8 - 497.1 mi - Sun-synchronous Satellites

Verhoging van het apogeum: de "transfer" baan



In apogeum /perigeum geldt:

$$\ell = r v_\varphi = r_a v_a = r_p v_p$$

$$\Delta v_1 = v_{pTO} - \sqrt{GM/r_1}$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{GM/r_2} - v_{aTO}$$

$$\text{Totale } \Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2$$

Transfer-ellips:

$$a_{TO} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$v_{aTO} = v_{pTO}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Hyperbolische banen

$$\frac{r}{r_p} = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

Uit baanvergelijking:

$r = \infty$: $\theta_a = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)$

Asymptoten : $[-\theta_a, \theta_a]$

Uit extern ref. stelsel:

$\mathbf{v}_\infty = \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_M$

V_∞ = hyperbolic approach and departure velocity relative to target body M

θ_a = true anomaly of asymptotes

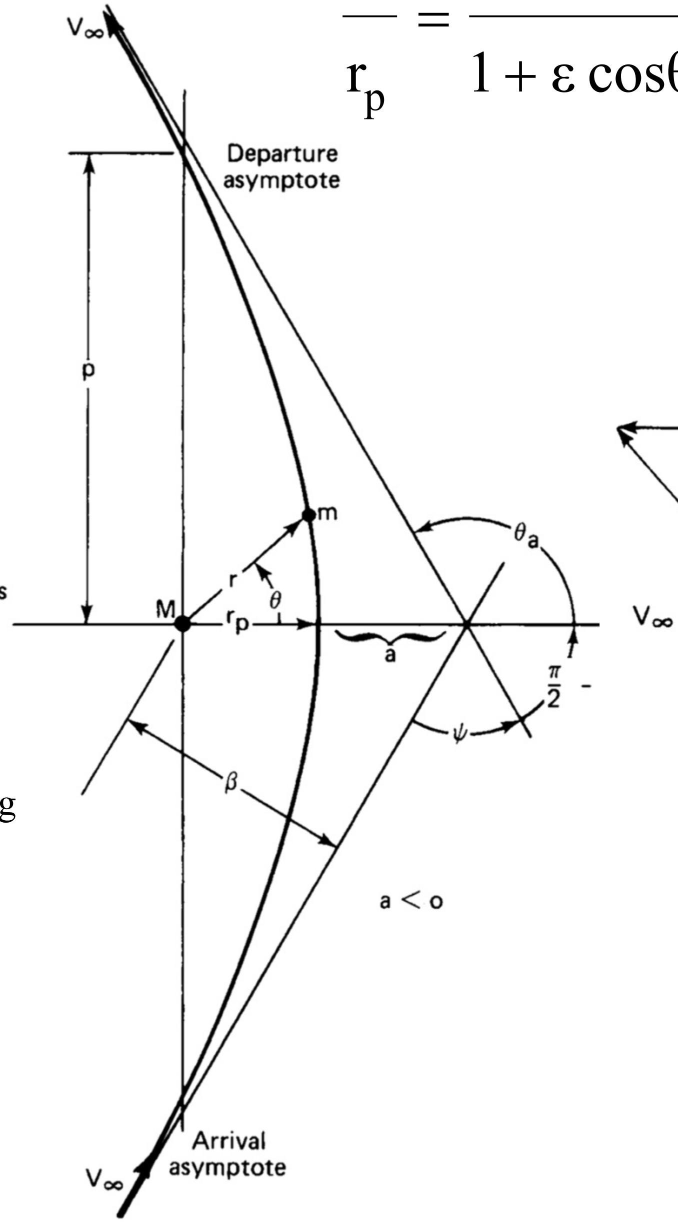
β = B-plane miss distance; offset in plane $\perp$ to arrival asymptote

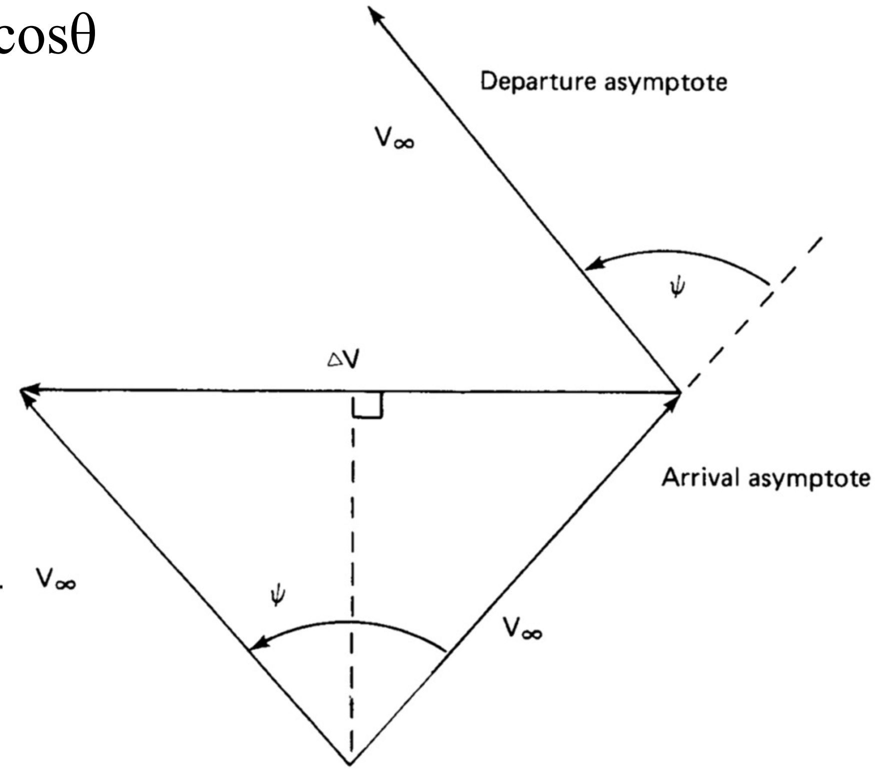
ψ = turning angle of passage

Uit de vis-viva vergelijking volgt met $r = \infty$:

$v_\infty{}^2 = -\frac{GM}{a}$ en

$\varepsilon = \frac{r_p v_\infty{}^2}{GM} + 1$





Richtingsverandering $\mathbf{v}_\infty$:

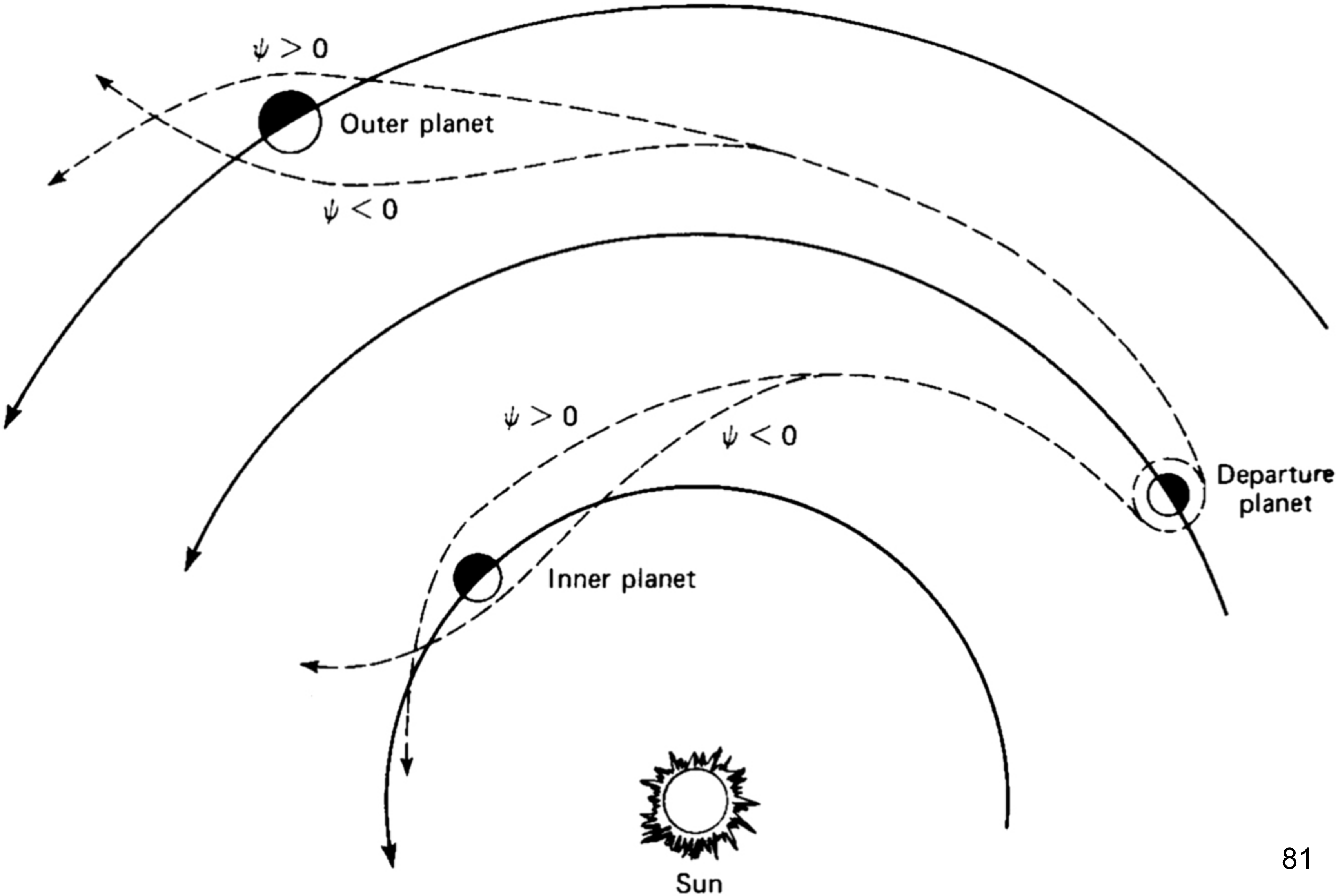
$\psi = 2\theta_a - \pi \;\rightarrow$

$\frac{\psi}{2} = \theta_a - \frac{\pi}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

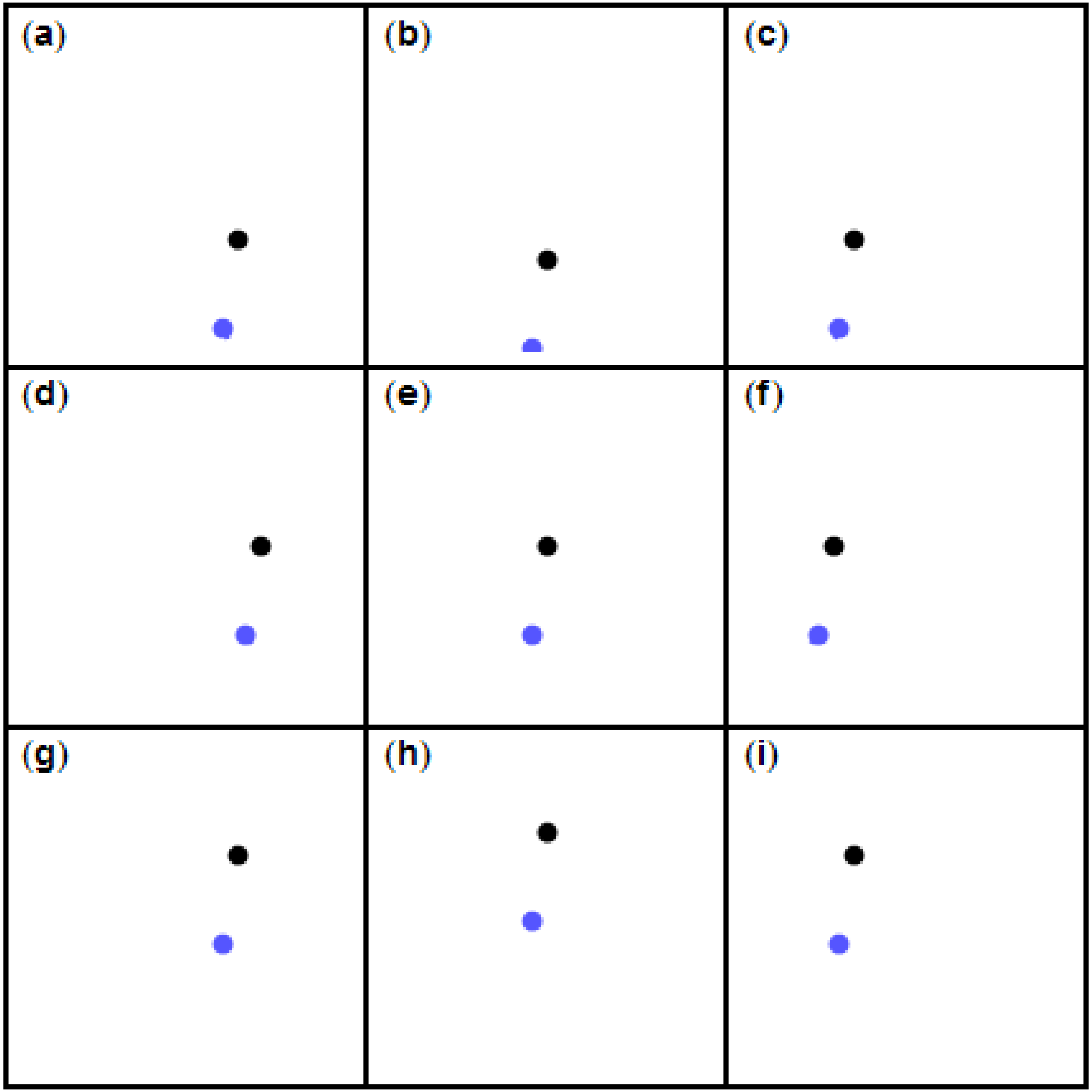
Snelheidsverandering in extern ref. stelsel:

$|\Delta\mathbf{v}| = 2\, v_\infty \sin\frac{\psi}{2} = \frac{2V_\infty}{\varepsilon}$

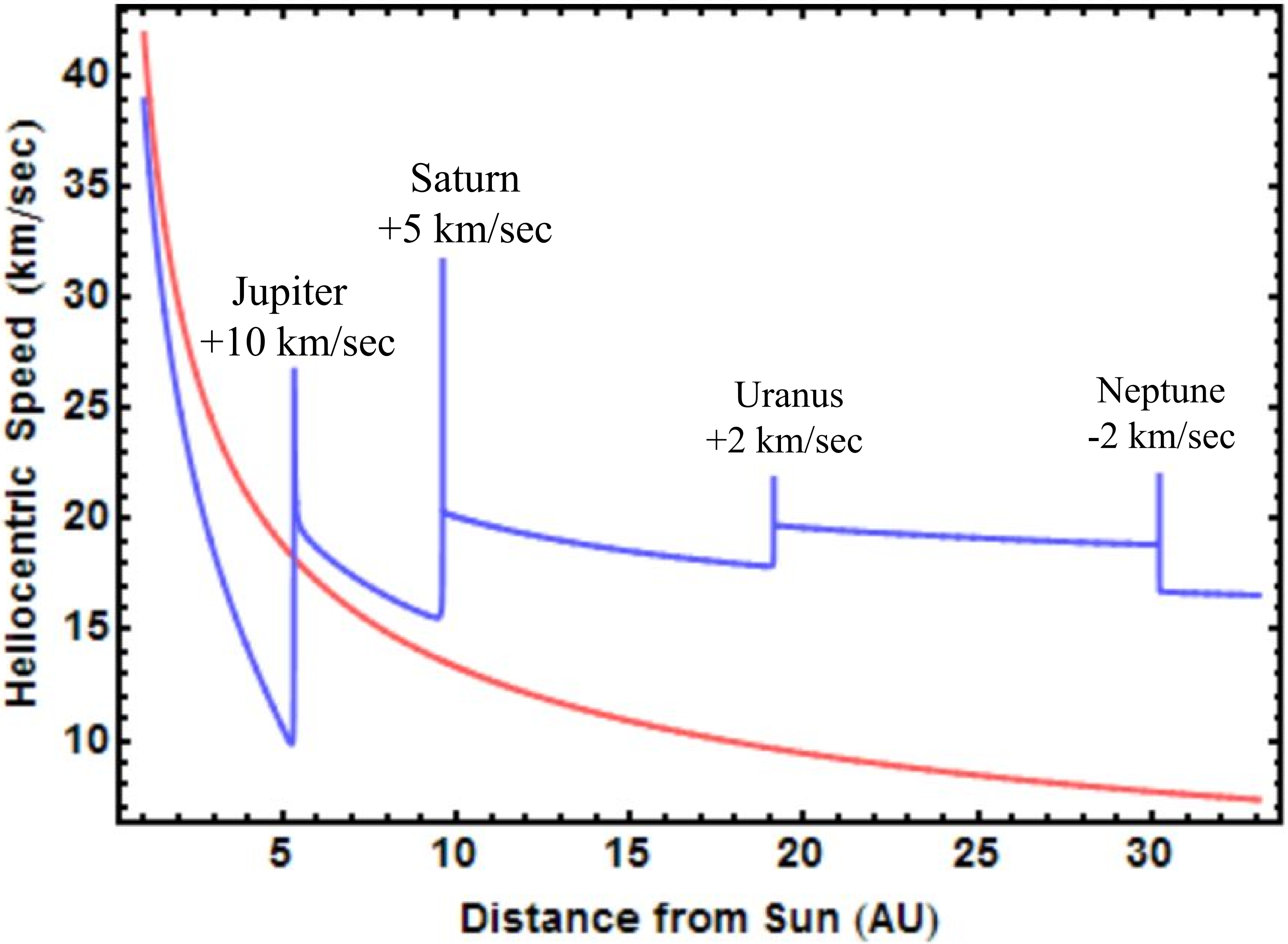
Interplanetaire banen met "gravity assist" hyperbolen



Gravity assist animation

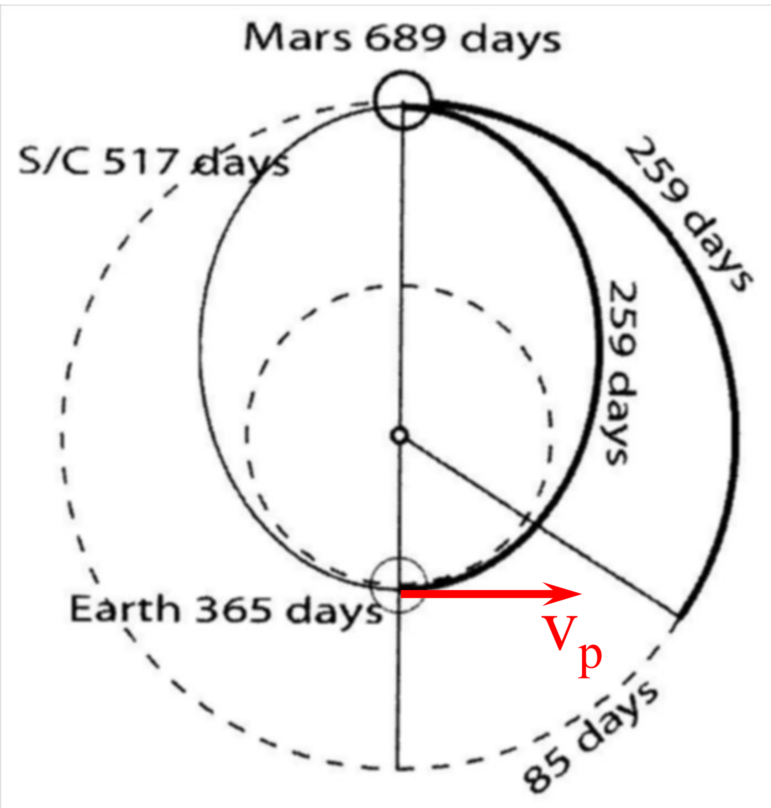


Gravity assists Voyager 2



Hyperbolische injectie naar Mars: de noodzakelijke delta-v

$$\frac{r}{r_p} = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$



$$r_{Mars} = \text{Aphelion} \rightarrow \cos\varphi = -1 \rightarrow$$

$$\frac{r_{Mars}}{r_{Aarde}} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{\left(r_{Mars}/r_{Aarde} - 1\right)}{\left(r_{Mars}/r_{Aarde} + 1\right)} = 0{,}208 \rightarrow$$

$$v_p = \sqrt{\frac{GM_{Zon}(1+\varepsilon)}{r_{Aarde}}} = 32{,}74\ \text{km/s} \rightarrow$$

$$v_{Aarde} = 29{,}8\ \text{km/s} \rightarrow v_+ = v_p - v_{Aarde} = 2{,}94\ \text{km/s}$$

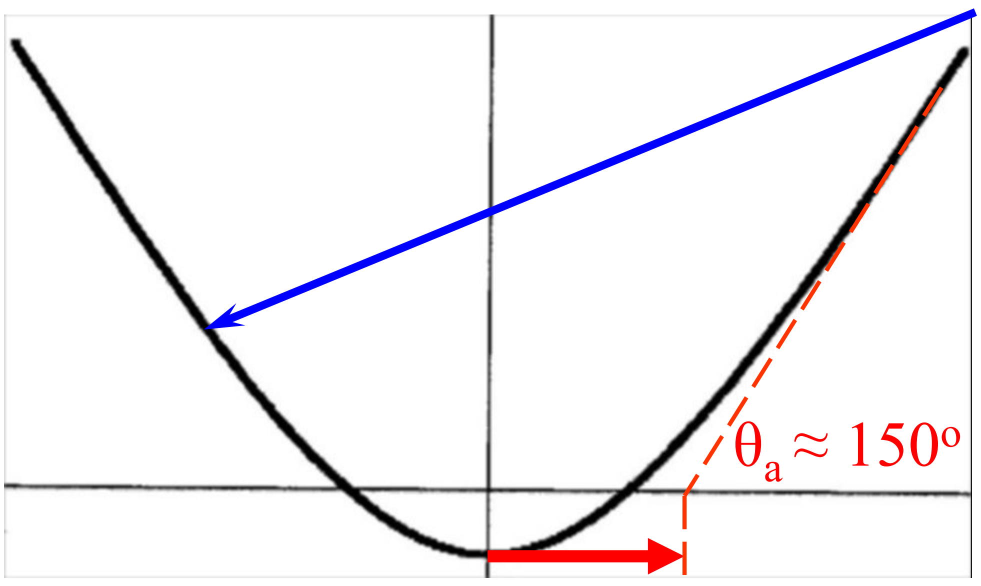
Hyperbolische injectie vanuit een 500 km baan

v_{hyp}, Δv, ε voor hyperbolische ontsnappingsbaan uit energiebalans kinetische energie:

$$\tfrac{1}{2} mv_{+}^{2} = \tfrac{1}{2} mv_{hyp}^{2} - \tfrac{1}{2} mv_{esc}^{2}, \; v_{esc} = v_{circ}\sqrt{2} \rightarrow v_{hyp} = \sqrt{v_{+}^{2} + 2v_{circ}^{2}}$$

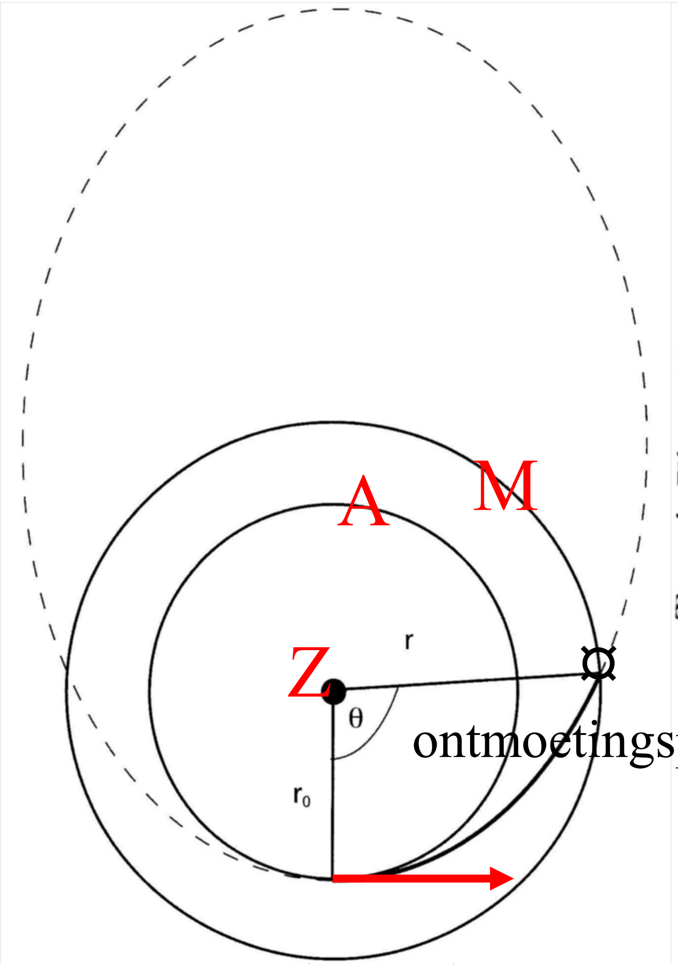
$$v_{hyp} = 11{,}17 \text{ km/s met } v_{+} = 2{,}94 \text{ km/s en } v_{circ} = 7{,}62 \text{ km/s} \rightarrow \Delta v = 3.55 \text{ km/s}$$

$$\varepsilon = \frac{v_{hyp}^{2}}{v_{circ}^{2}} - 1 \rightarrow \varepsilon = 1.15 > 1, \text{ zoals vereist voor een hyperbolische baan!}$$

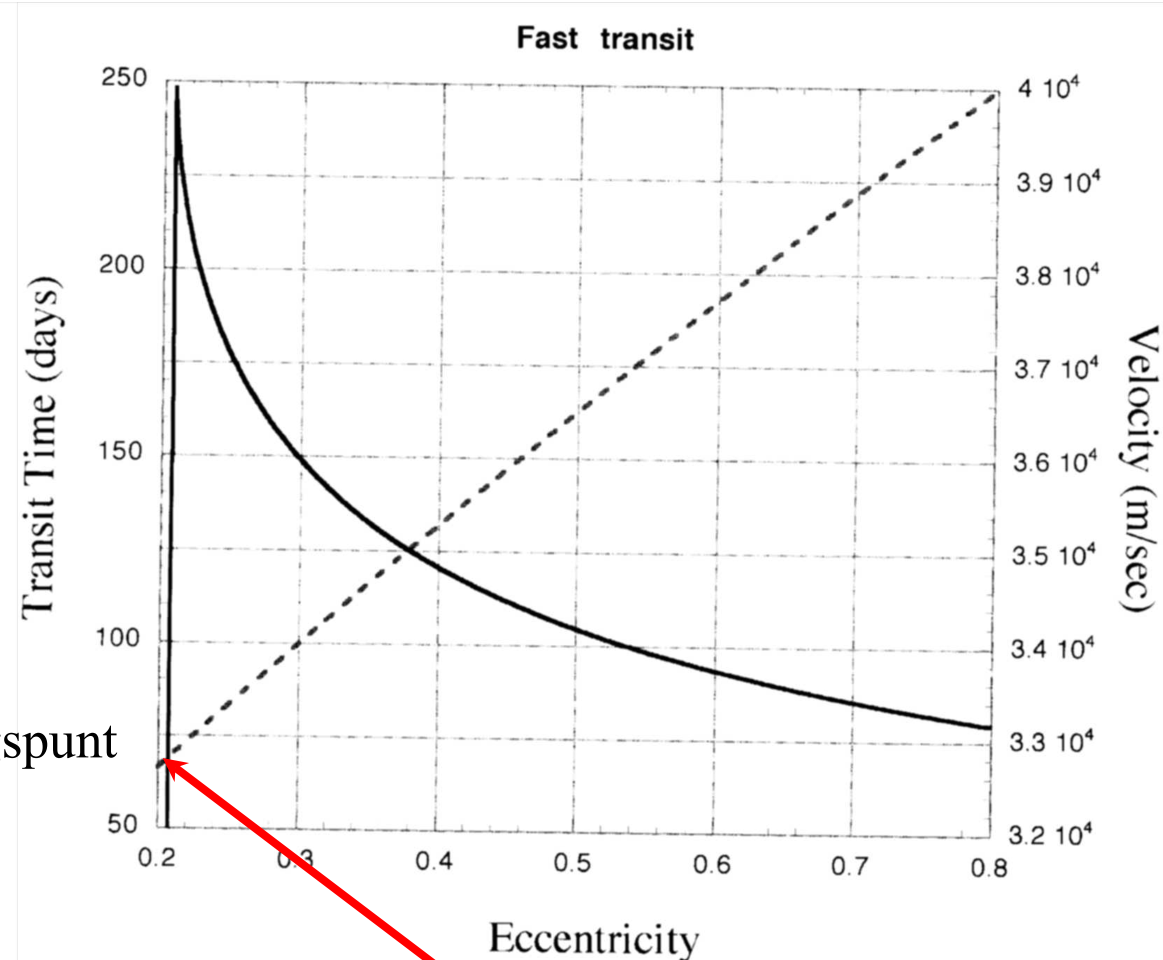


Horizontaal snelheidsincrement Δv = 3,55 km/s (Hohman baan)

“snelle oversteek” naar Mars



ontmoetingspunt

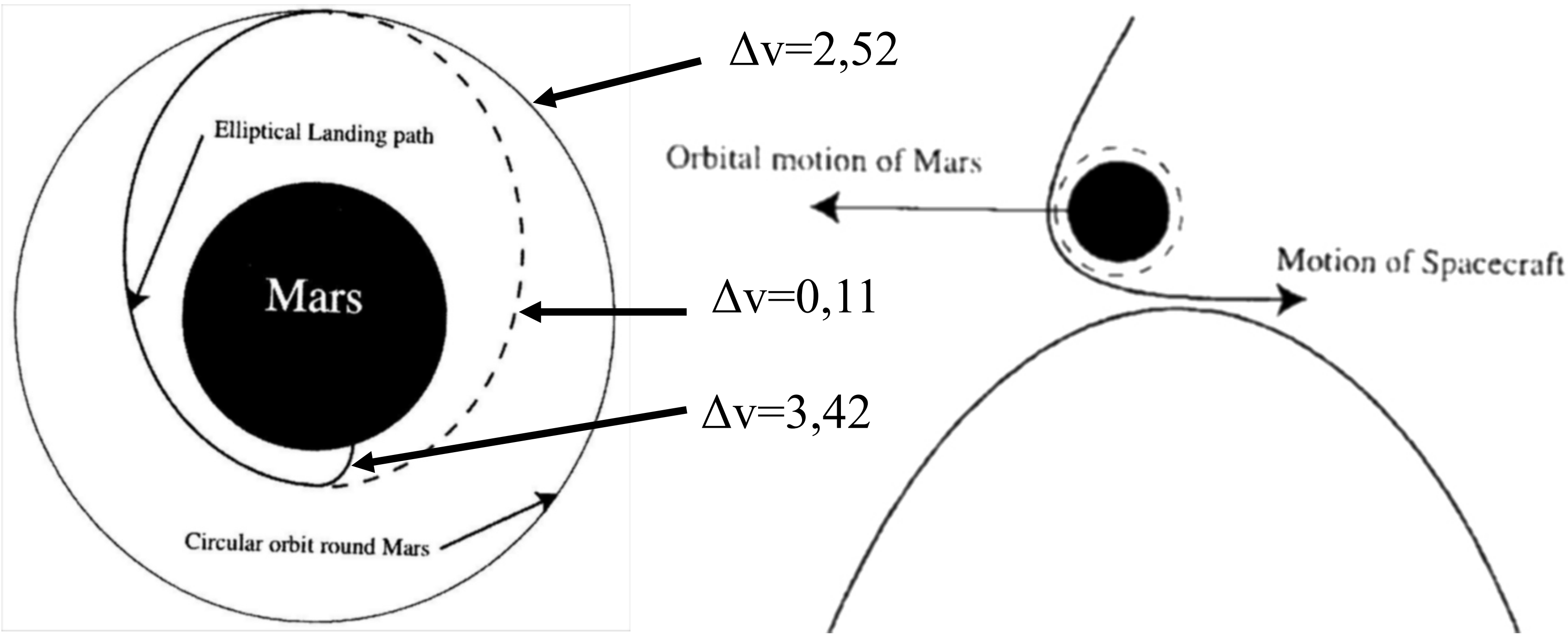


$\Delta v >> \Delta v_{Hohman}$

Hohman baan:
32,74 km/sec

Totale Δv noodzakelijk voor Mars round trip

• Injectie (hyp) → Mars Hohman ellips: Δv = 3,55 km/s



• Aanvliegen(hyperbool)→Cirkelbaan om Mars(500 km): Δv = 2,52 km/s
• Cirkel-omloopbaan → Landings-ellips: Δv = 0,11 km/s
• Landing in rotatierichting planeet (0,242km/s): Δv = 3,42 km/s

Totaal Δv round trip 2 x 9,6 = 19,2 km/s

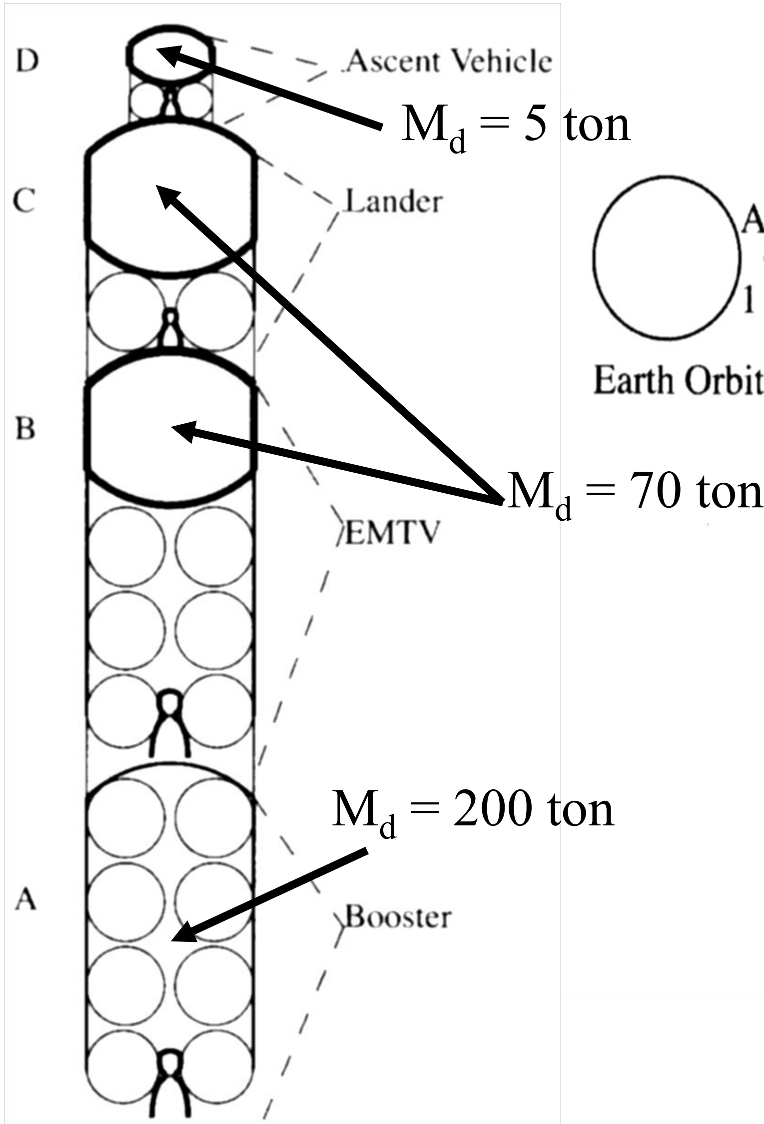
Expeditie Mars

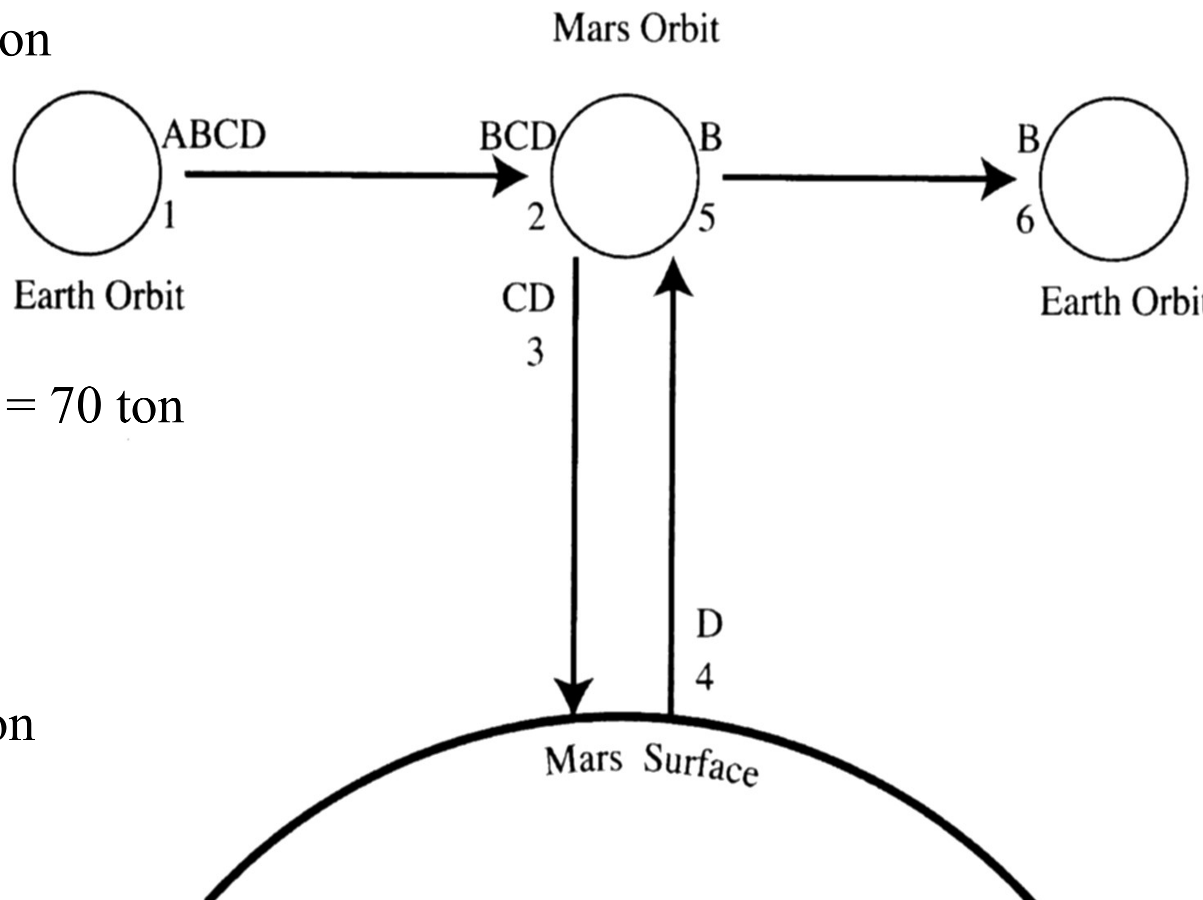
Is (was) er leven op Mars en zullen we dat vinden?

Zo ja, wat betekent die ontdekking dan?

Mars Express (ESA) 3D image Valles Marineris (The Hour Glass)

Mars: missieprofiel





Mars: missieprofiel

Manoeuvre	Delta-V (km/s)	Multiplier	Vehicle	Fuel cost	Fuel mass (tonnes)
1	3.55	1.99	ABCD	1 ton	3,373
2	2.45	1.13	BCD	vanaf Mars	789.2
3	3.42	1.87	CD	1.87 + 1.87x1.13	157.8
4	3.42	1.87	D	+ 1.87x1.13x1.99	9.4
5	2.52	1.18	B	→ 8,2 ton	246.5
6	3.55	1.99	B	vanuit LEO	139.4

chemical

Totale massa M_d+M_f in 500 km aardbaan≈5000 ton = 200 shuttle-vrachten

Manoeuvre	Delta-V (km/s)	Multiplier	Vehicle	Fuel mass (tonnes)
1	3.55	1.18	ABCD	828.1
2	2.45	0.72	BCD	249.6
3	3.42	1.12	CD	90.3
4	3.42	1.12	D	5.6
5	2.52	0.73	B	113.4
6	3.55	1.18	B	82.6

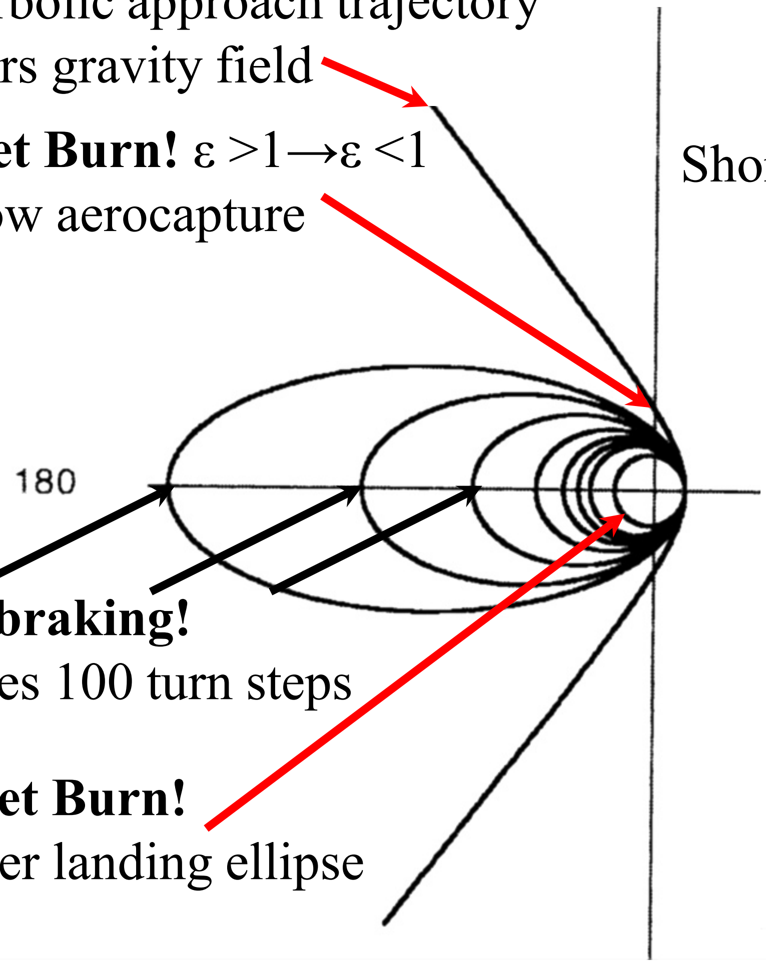
cryogenic

Totale massa M_d+M_f (koeling!) in aardbaan≈1600 ton = 65 shuttle-vrachten

Fuel saving: aero-capture/braking, gravity assist

Hyperbolic approach trajectory in Mars gravity field

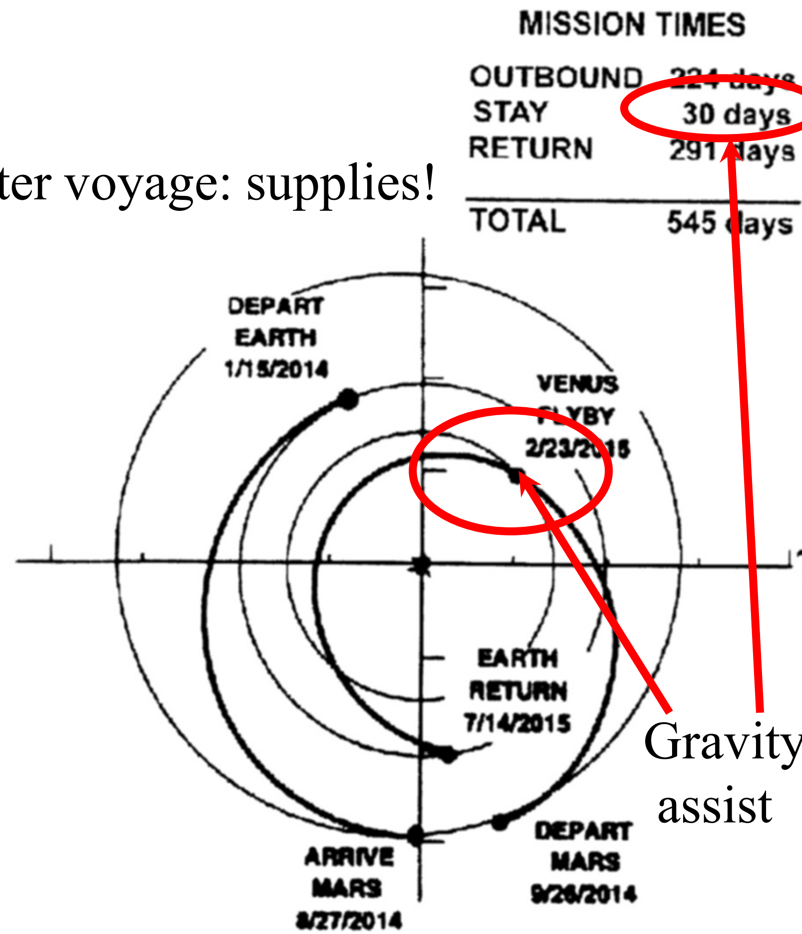
Rocket Burn! $\varepsilon > 1 \rightarrow \varepsilon < 1$ to allow aerocapture



Aerobraking!
ellipses 100 turn steps

Rocket Burn!
to enter landing ellipse

Shorter voyage: supplies!



Gravity assist

Δv_{Mars} saving ≈ 4.9 km/s
Δv_{Aarde} saving ≈ 3.2 km/s

$\rightarrow$ Δv_{total} reduced from 19.2 to 11.1 km/s
saving $\approx$ 3000 ton of storable propellant

Nuclear Propulsion for a Mars expedition

Manoeuvre	Delta-V (km/s)	Multiplier	Vehicle	Fuel mass (LH_2/O_2)	Fuel mass (nuclear)
1	3.55	0.43	ABCD	828	155
2	2.45	0.30	BCD	250	74.4
3	3.42	0.45	CD	90	34.8
4	3.42	0.45	D	5.6	2.3
5	2.52	0.31	B	113	32.2
6	3.55	0.48	B	83	33.6

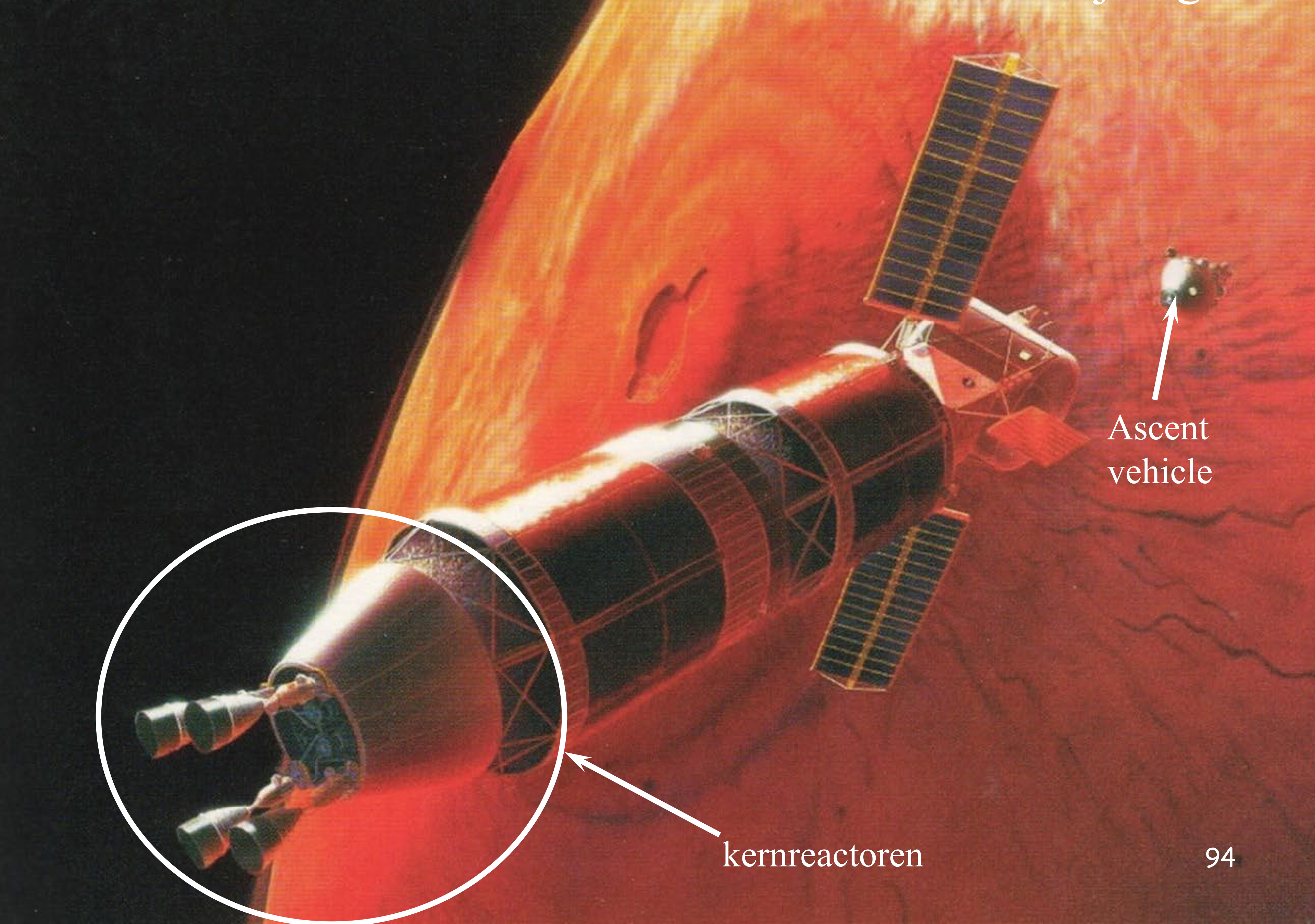
Total nuclear fuel $\approx$ 330 ton $\approx$ fuel requirement present SEP

- All Nuclear Mars mission: thrusting times -

Thrusting time for capture into circular Earth orbit (6):
$t_T \approx 1000$ sec ($M_0 = M_{EMTV} + M_f \approx 105$ ton) $\approx$ 1/5 circular orbital period

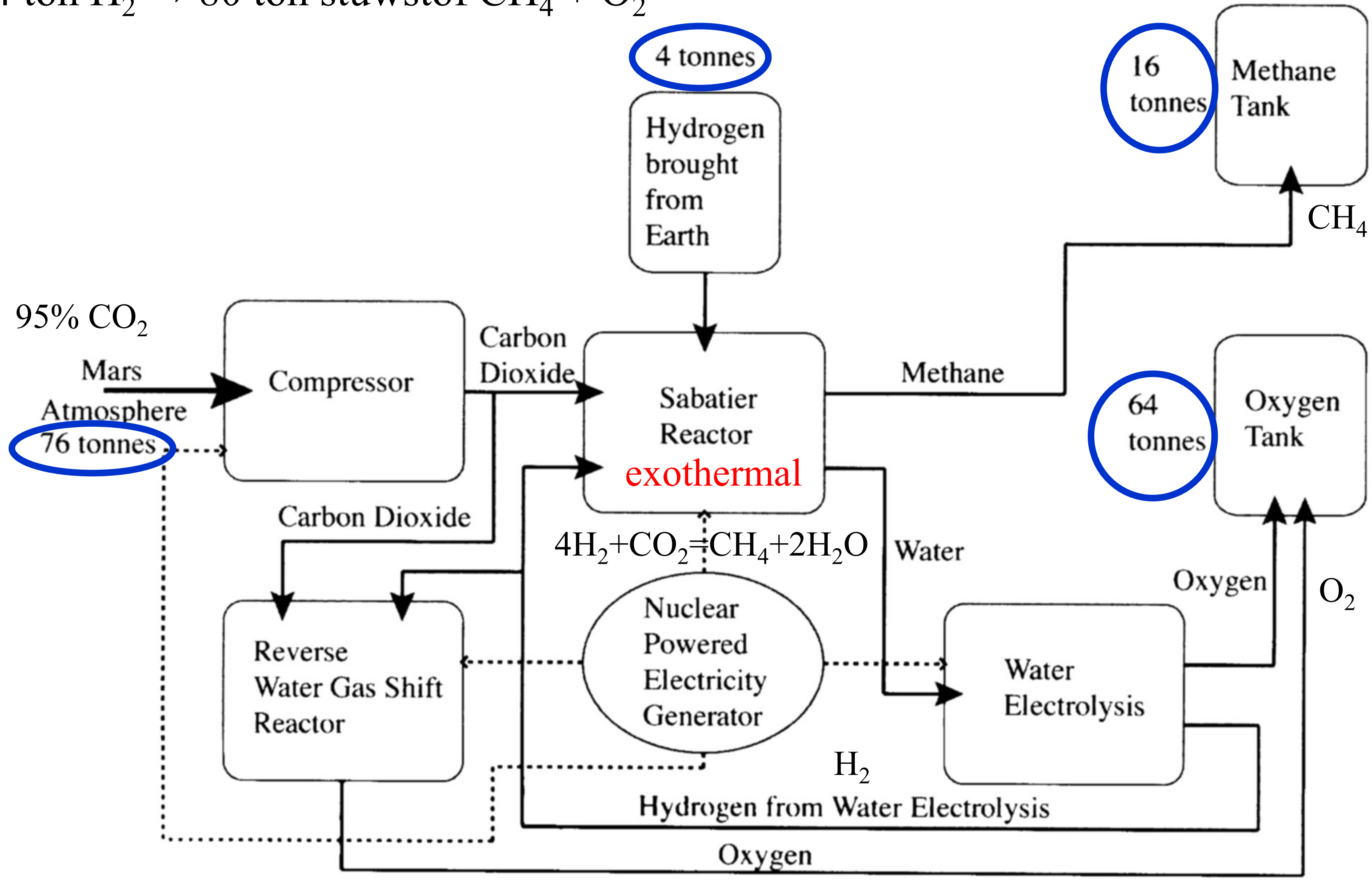
Thrusting time Earth-Mars transfer orbit (1):
$t_T \approx 1.2$ hour ($M_0 = M_{EMTV} + M_L + M_{ASC} + M_f \approx 480$ ton) $<$ orbital period

Return module B in Marsbaan met nucleaire aandrijving



MARS: in situ productie CH_4 en O_2

4 ton $H_2 \rightarrow$ 80 ton stuwstof $CH_4 + O_2$



Short-term Mars mission: hybrid

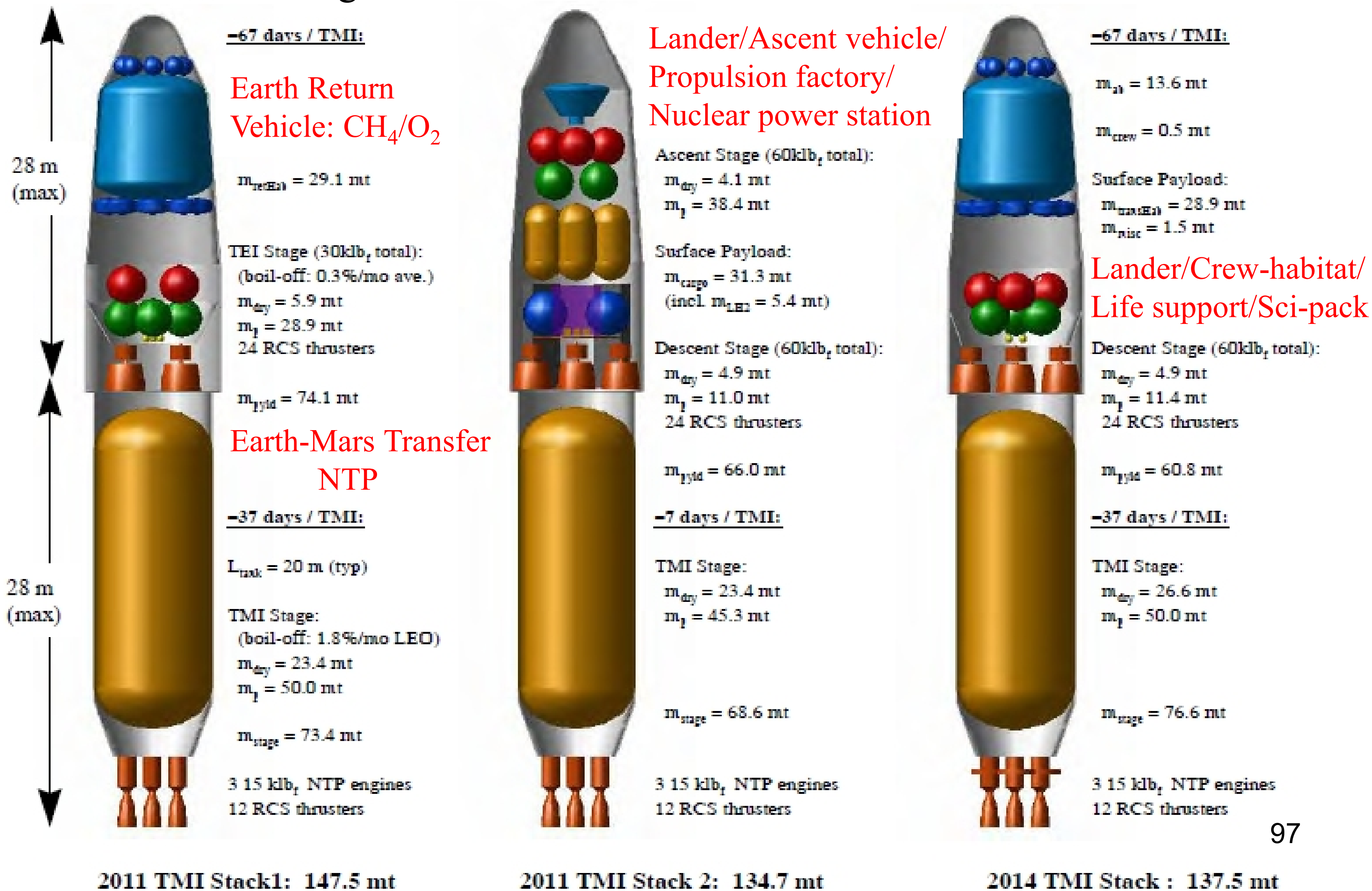
- Earth-Mars tranfer: Nuclear Thermal Propulsion
- Mars capture/orbit circularisation: aerocapture (including braking chutes) + chemical burning assist
- Mars landing: chemical propulsion + aerobraking
- Ascent into Mars orbit: Chemical (in situ produced)
- Earth Return tranfer: Chemical propulsion
- Earth capture/landing: Aerocapture/braking

Total mass $\approx$ 500 ton, $M_f/M_d \approx 1$

NASA: Mars Reference Mission-3

6 lanceringen met 80-ton Heavy Lifter (Booster) naar Low Earth Orbit (500 km)

8.6 m Nog te ontwikkelen SLS tot 130 ton.



Standregeling van een ruimtevoertuig

- Vectoren: inwendig en uitwendig product
- Referentiestelsels: inertiaal en niet-inertiaal
- Rotatie dynamica: bewegingsvergelijking
- Stoorkoppels
- Passieve standregeling
- Actieve standregeling: terugkoppeling
- Standsensoren
- Standactuatoren
- Operationele modi

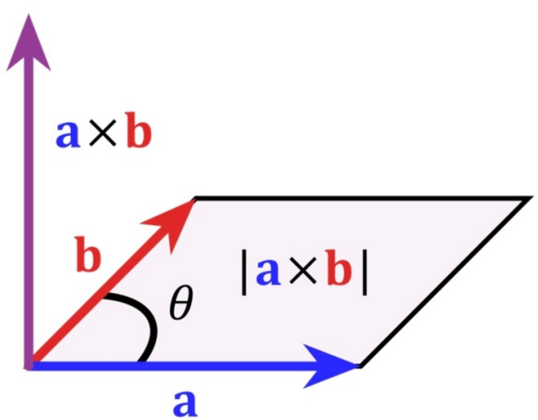
Inwendig en uitwendig product van vectoren

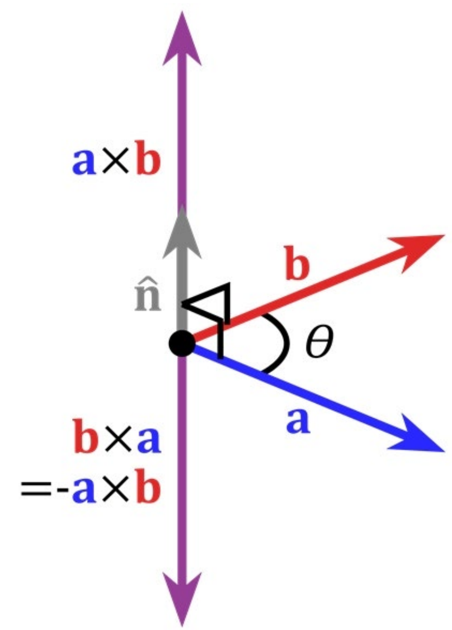
$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$
$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

Inwendig product: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ (scalar)

Uitwendig (vector) product: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ (vector)

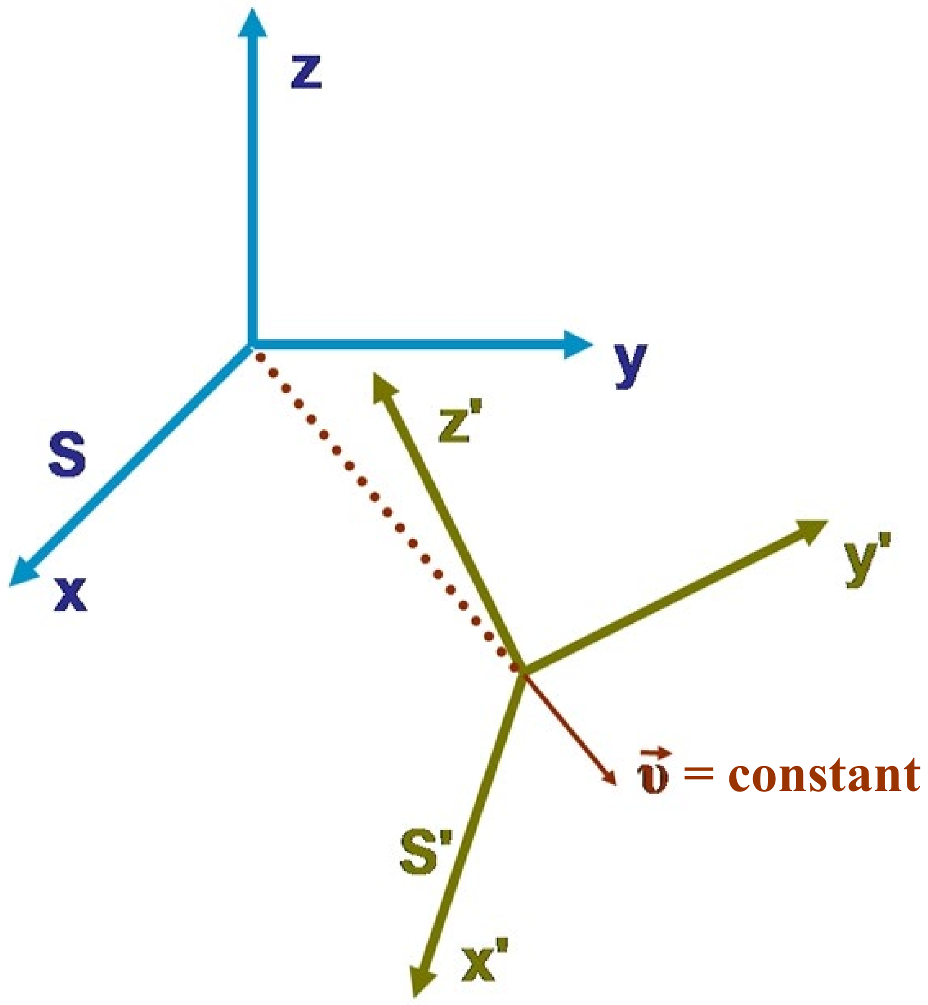
$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$





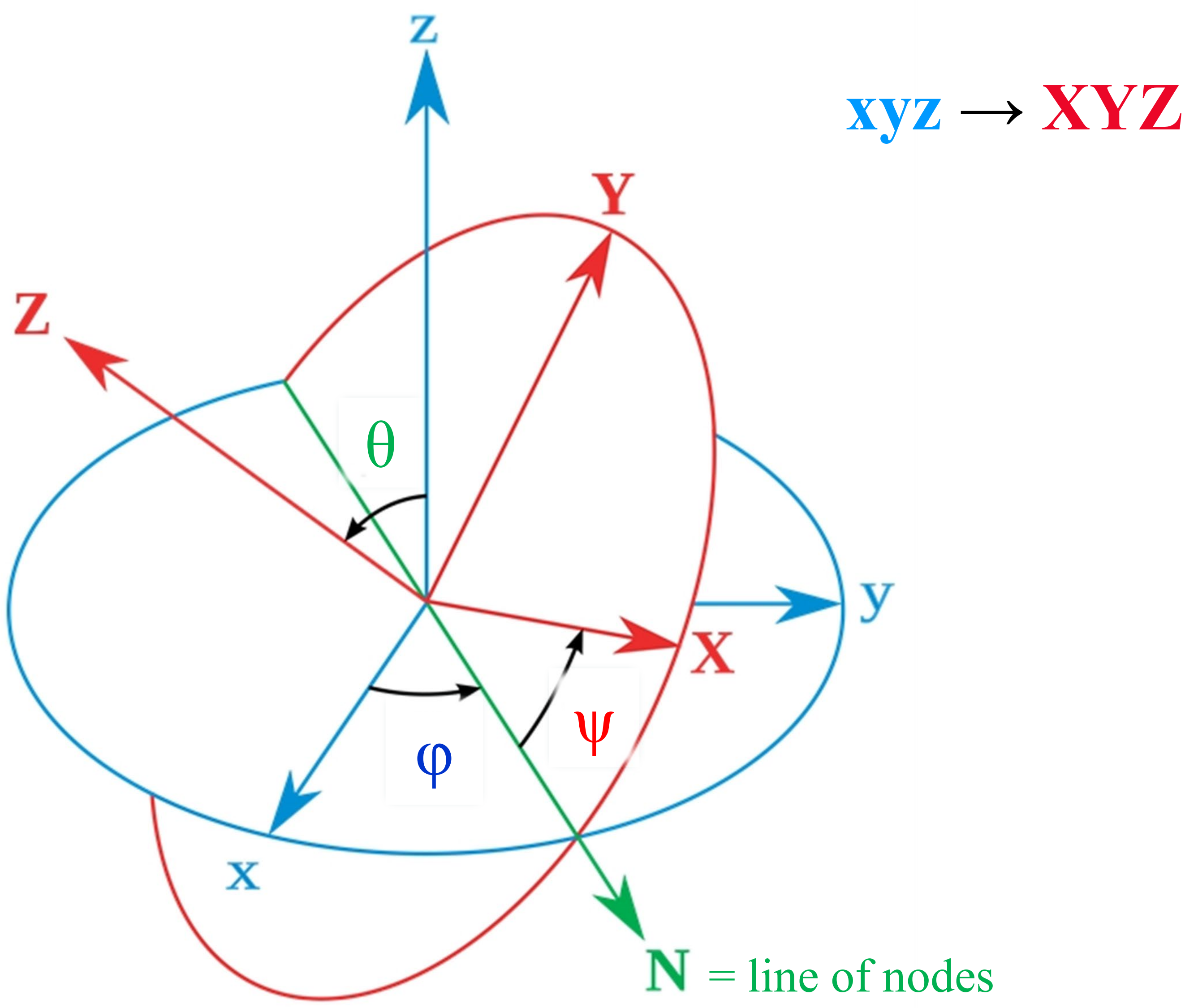
Inertiaal stelsels

- Inertiaal stelsels zijn referentiestelsels die ten opzichte van elkaar (dus relatief) in rust zijn of met eenparige snelheid rechtlijning bewegen: er is dus geen sprake van versnelling!



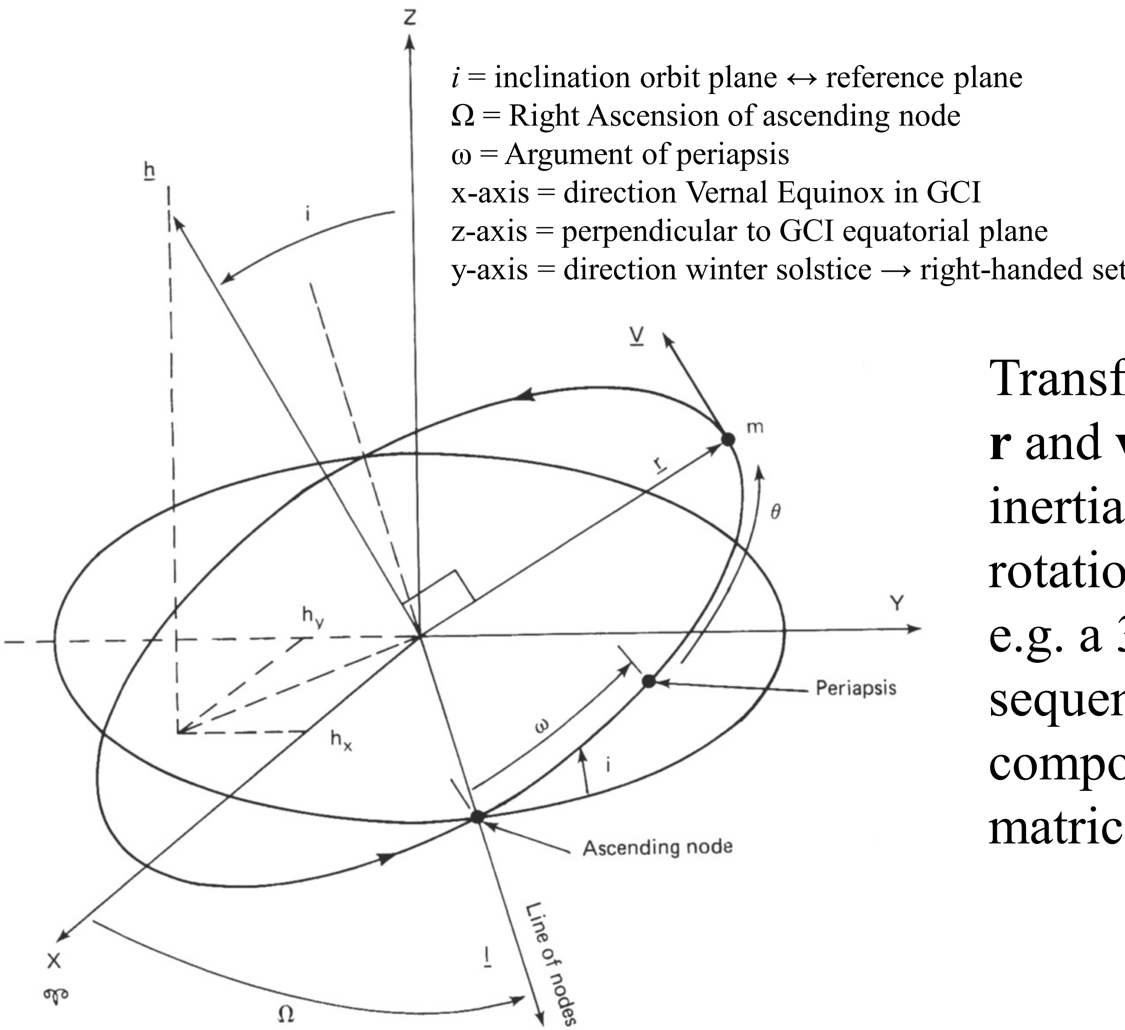
Euler Hoeken

- Worden toegepast bij het beschrijven van de rotatie van een stijf lichaam
  Vb. linksomdraaiend over φ (om z), θ (om N), ψ (om Z): rotatie 3-1-3



Inertial Reference systems in astrodynamics

- From orbital plane coordinates (r,φ) to an inertial reference system (GCI)
  Geocentric Inertial System (GCI): reference earth's equatorial plane, no rotation, earth's orbital acceleration around the sun is neglected → inertial reference system.
- Heliocentric Inertial System (HCI): reference solar system ecliptic plane



Transformation of the orbit vectors **r** and **v** into their equivalents in inertial space is carried out by rotational transformation through e.g. a 3-1-3 Euler angle rotation sequence ($\varphi = \Omega, \theta = i, \psi = \omega$) composed of the elementary rotation matrices $[\mathbf{T}]_{\Omega}$, $[\mathbf{T}]_{i}$ and $[\mathbf{T}]_{\omega}$.

The 3-1-3- transformation matrix

The elementary rotation matrices comprise the following elements

$$[\mathbf{T}]_\Omega = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{T}]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}, [\mathbf{T}]_\omega = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

The transformation matrix, in combined form, for the conversion of orbital coordinates into GCI-coordinates can be obtained from:

$$[\mathbf{T}]_{\mathrm{orb}\rightarrow\mathrm{GCI}} = [\mathbf{T}]_\Omega \cdot [\mathbf{T}]_i \cdot [\mathbf{T}]_\omega$$

! proper multiplication (rotation) sequence essential, multiplication of matrices is not commutative !

The GCI coordinates follow from:

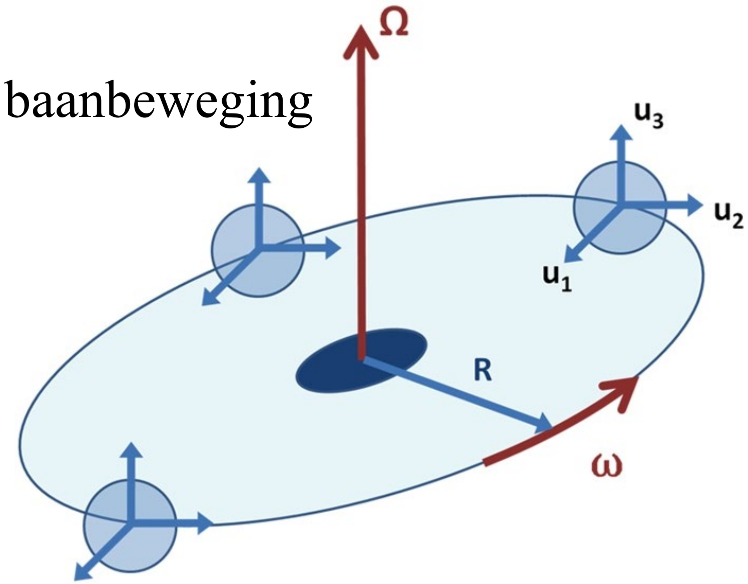
$$\begin{bmatrix} x_{\mathrm{GCI}} \\ y_{\mathrm{GCI}} \\ z_{\mathrm{GCI}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega\cos\Omega - \cos i\sin\omega\sin\Omega & -\cos\Omega\sin\omega - \cos i\cos\omega\sin\Omega & \sin\Omega\sin i \\ \cos\omega\sin\Omega + \cos\Omega\cos i\sin\omega & \cos\omega\cos i\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega & -\cos\Omega\sin i \\ \sin i\sin\omega & \cos\omega\sin i & \cos i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{\mathrm{orb}} \\ y_{\mathrm{orb}} \\ z_{\mathrm{orb}} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{T}]_{\mathrm{orb}\rightarrow\mathrm{GCI}}$ is an orthonormal matrix, the inverse transform is then given by $[\mathbf{T}]^{T}{}_{\mathrm{orb}\rightarrow\mathrm{GCI}}$, the transposed matrix of $[\mathbf{T}]_{\mathrm{orb}\rightarrow\mathrm{GCI}}$. By applying $[\mathbf{T}]^{T}{}_{\mathrm{orb}\rightarrow\mathrm{GCI}}$, the orbital coordinates can in turn be expressed in terms of the GCI coordinates:

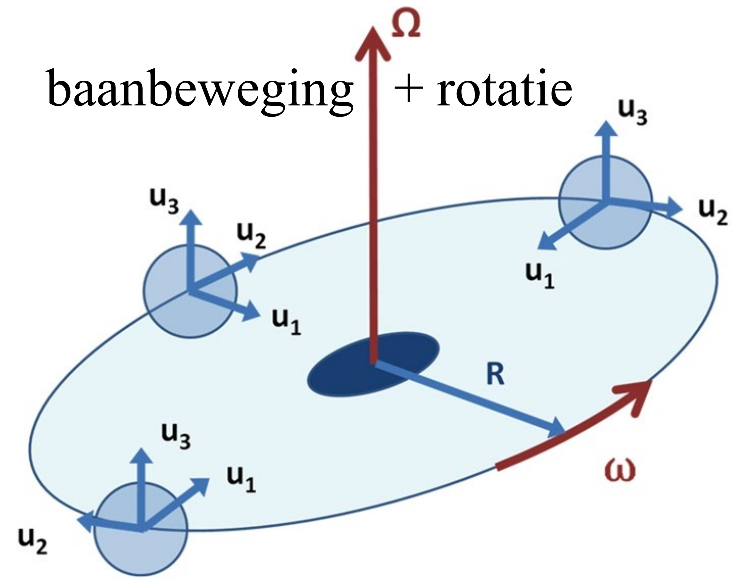
$$\begin{bmatrix} x_{\mathrm{orb}} \\ y_{\mathrm{orb}} \\ z_{\mathrm{orb}} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]^{T}{}_{\mathrm{orb}\rightarrow\mathrm{GCI}} \cdot \begin{bmatrix} x_{\mathrm{GCI}} \\ y_{\mathrm{GCI}} \\ z_{\mathrm{GCI}} \end{bmatrix}$$

Niet-Inertiaalstelsels: in baanbeweging of roterend

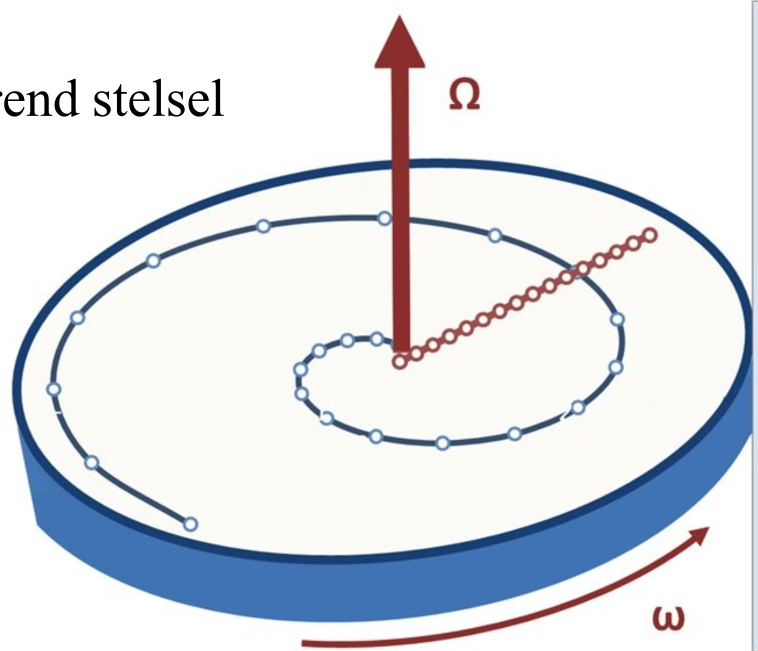
baanbeweging

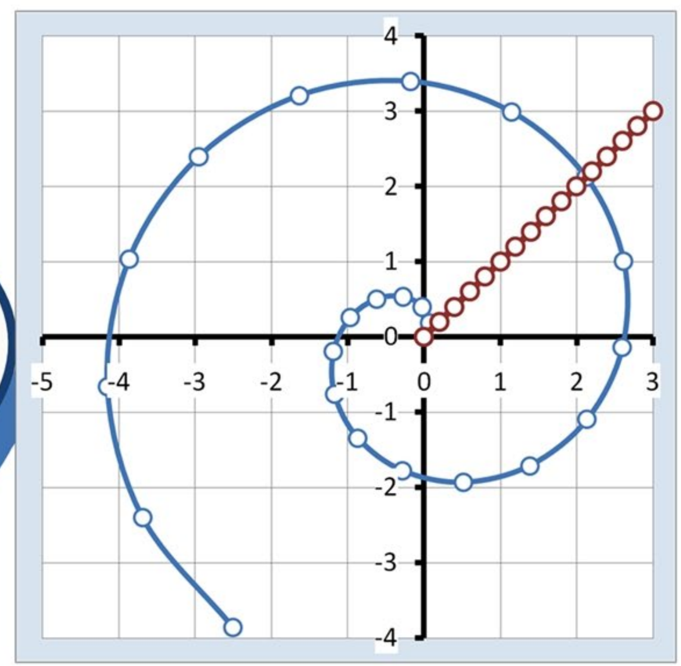


baanbeweging + rotatie



roterend stelsel





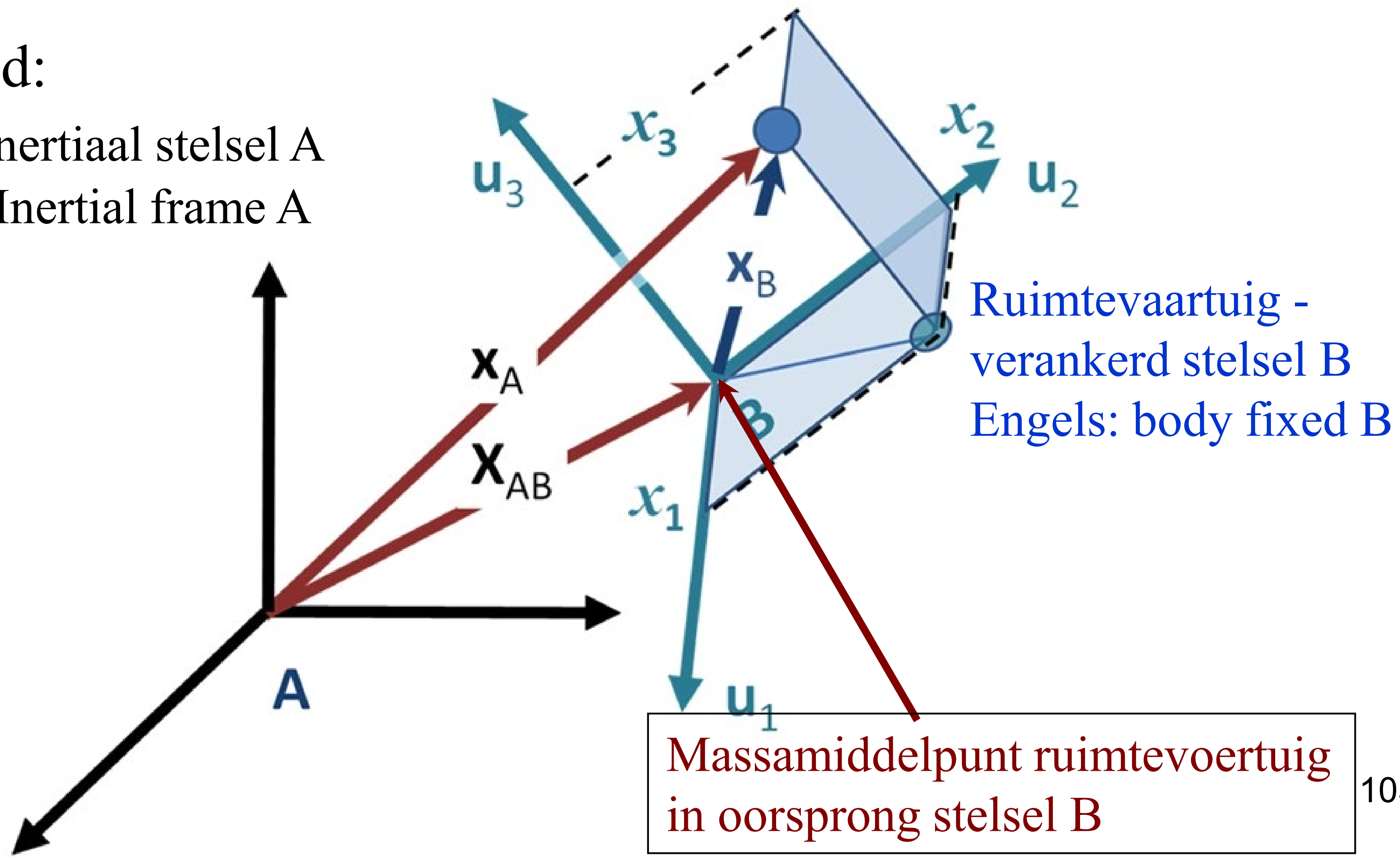
Stand van een ruimtevoertuig

- Definitie:

  Hoekorientatie van een aan het ruimtevaartuig verankerd coordinaatstelsel t.o.v. een apart gedefinieerd extern stelsel

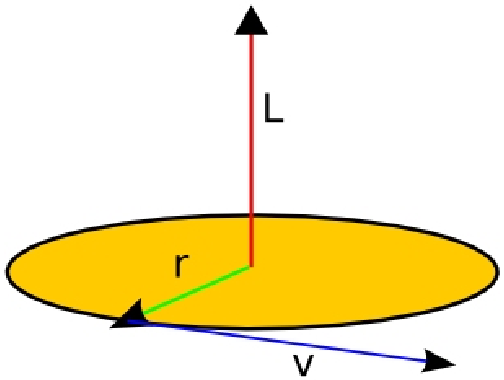
- Voorbeeld:

  Extern inertiaal stelsel A
  Engels: Inertial frame A



Krachtkoppel en draai-impulsmoment

Draai-impulsmoment: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ = impuls)
Roterende puntmassa: $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ($\mathbf{r}$ vanuit rotatiemiddelpunt)
Roterend stijf lichaam: $\mathbf{L} = \Sigma\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \Sigma\, m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = [\mathbf{I}]\cdot\boldsymbol{\omega}$
Rotatie-as is een symmetrie-as van het lichaam: $[\mathbf{I}]$= scalar , $\mathbf{L}$ en $\boldsymbol{\omega}$ parallel!
Rotatie-as is *geen* symmetrie-as: $[\mathbf{I}]$ is een 3 x 3 symmetrische matrix,
$[\mathbf{I}]$= traagheidsmatrix, $\mathbf{L}$ en $\boldsymbol{\omega}$ niet parallel!



Afgesloten systeem: $\mathbf{L}$ = constant

Extern krachtkoppel **T** (vectorsom) **:**

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{L}} = [\dot{\mathbf{I}}]\cdot\boldsymbol{\omega} + [\mathbf{I}]\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

In inertiaal systeem $[\dot{\mathbf{I}}] \neq 0 \rightarrow$ kies daarom voor verankering van de referentie-assen aan het stijve lichaam met het massamiddelpunt als oorsprong!
Engels: "*body-fixed centre of mass frame*"

De traagheidsmatrix

De traagheidsmatrix [**I**]:
- diagonale termen zijn traagheidsmomenten I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}
- niet-diagonale termen zijn traagheidsproducten I_{xy}, I_{xz}, I_{yz},….

Stelling:
Er is altijd een body-fixed assenstelsel te vinden waarin de traagheidsproducten nul zijn, dat zijn de hoofdtraagheidsassen (*principal axes*), een symmetrie-as is altijd hoofdtraagheidsas!

[**I**] is dan een *diagonaalmatrix* met alleen traagheidsmomenten

$$I_{xx} = I_x, \quad I_{yy} = I_y, \quad I_{zz} = I_z$$

Dus geldt voor een body-fixed *principal axes* centre of mass frame:

$$(\dot{\mathbf{L}})_b = [\mathbf{I}] \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} \qquad ([\dot{\mathbf{I}}] \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}),$$

met [**I**] = *diag*(I_x, I_y, I_z) in body-fixed coordinaten.

Bewegingsvergelijking van Euler (1)

Bewegingsvergelijking ten gevolge van een extern koppel **T:** beschouw een willekeurige vector **u**, gefixeerd in het roterende *body-fixed frame* (*b*).
Gezien vanuit een *inertiaal stelsel* (*i*) beweegt deze vector met snelheid:

$$(\dot{\mathbf{u}})_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}\ , \ (= \textit{tijdsafgeleide voor een roterend stelsel})$$

met $\boldsymbol{\omega}$ en **u** in body frame coordinaten en de tijdsafgeleide van vector **u** zoals gezien vanuit het inertiaal stelsel. Als **u** in het body-fixed frame niet gefixeerd blijft maar verandert met snelheid $(\dot{\mathbf{u}})_b$, dan volgt $(\dot{\mathbf{u}})_i$ uit vectoriële optelling:

$$(\dot{\mathbf{u}})_i = (\dot{\mathbf{u}})_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \qquad \textit{(Coriolis theorema)},$$

waarin $(\dot{\mathbf{u}})_b$ de tijdsafgeleide van **u** zoals gezien vanuit het body-fixed frame.
Pas dit toe op het draai-impulsmoment **L**:

$$(\dot{\mathbf{L}})_i = (\dot{\mathbf{L}})_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

Uit $(\dot{\mathbf{L}})_i = \mathbf{T}$ en $\mathbf{L} = [\mathbf{I}]\cdot\boldsymbol{\omega}$,

$$(\dot{\mathbf{L}})_b = \mathbf{T} - \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{I}]\cdot\boldsymbol{\omega} \quad \textit{(bewegingsvergelijking van Euler)},$$

met **L**, **T** en $\boldsymbol{\omega}$ uitgedrukt in body-coordinaten.

Bewegingsvergelijking van Euler (2)

De bewegingsvergelijking, in vectorcomponenten, voor een "body-fixed principal axes centre of mass frame (x,y,z)" worden dan:

$$I_x\dot{\omega}_x = T_x + (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$

$$I_y\dot{\omega}_y = T_y + (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$

$$I_z\dot{\omega}_z = T_z + (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

Dit zijn de componenten van de bewegingsvergelijking van Euler voor de beweging van een stijf lichaam onder invloed van een extern krachtkoppel.

Bij vrije rotatie, dus voor $\mathbf{T} = \mathbf{0}$, gelden dan de volgende relaties:

$$I_x\dot{\omega}_x = (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$

$$I_y\dot{\omega}_y = (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$

$$I_z\dot{\omega}_z = (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

Componenten van **ω** in een roterend "body fixed" stelsel

Voorbeeld: roterende satelliet in een baan om de aarde.
Model: vrij vallend lichaam met axiale symmetrie: tol met $I_x = I_y = I_0$ en $I_z = I$

De component-vergelijkingen van Euler worden dan:

$\dot{\omega}_z = 0 \rightarrow \omega_z = \text{constant!}$

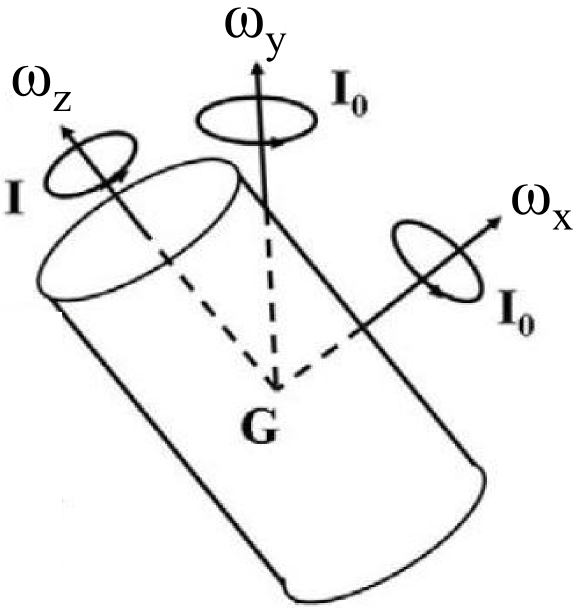
$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= -[(I/I_0 - 1)\omega_z]\omega_y = -\,\Omega\omega_y \\ \dot{\omega}_y &= \;\;[(I/I_0 - 1)\omega_z]\omega_x = +\,\Omega\omega_x \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{aligned} &\omega_x = \omega_0 \cos(\Omega t + \delta) \\ &\omega_y = \omega_0 \sin(\Omega t + \delta) \\ &\omega_0, \delta \text{ uit begincondities} \end{aligned}$$

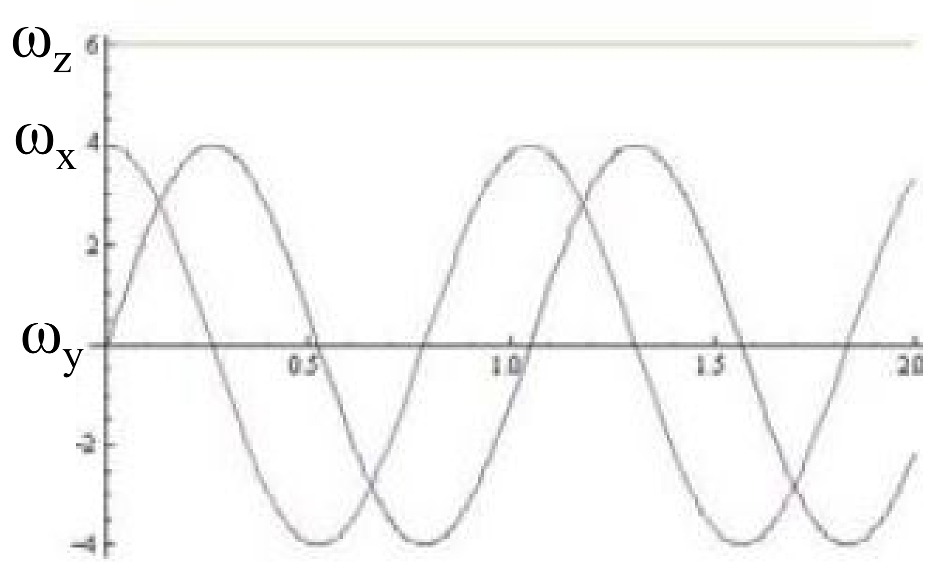
$(\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2)^{1/2} = \omega_0 = \text{constant} \Rightarrow (\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 + \omega_z{}^2)^{1/2} = |\boldsymbol{\omega}| = \omega = \text{constant}$

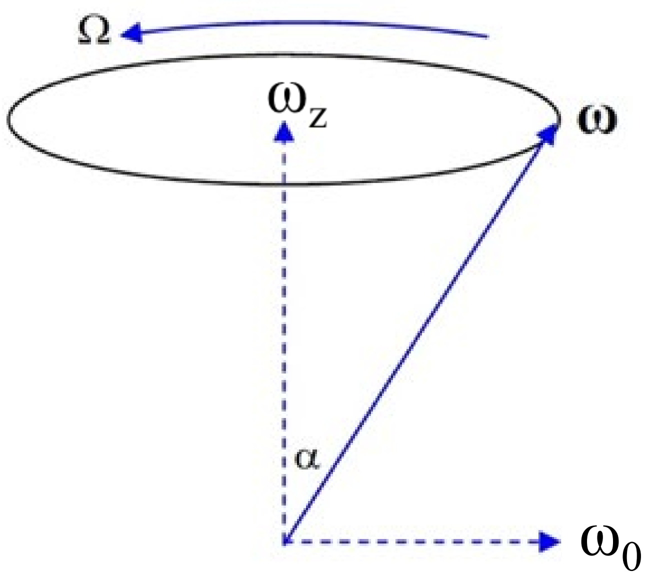
Hoek α tussen symmetrie-as z in het body frame en **ω** volgt uit:

$$\cos\alpha = \omega_z/\omega = [I_0/(I - I_0)]\Omega/\omega = \text{constant}$$
$$\Omega = (I/I_0 - 1)\omega_z = (I/I_0 - 1)\,\omega\cos\alpha = \text{constant}$$

Componenten & precessie van **ω** gezien vanuit het body-frame

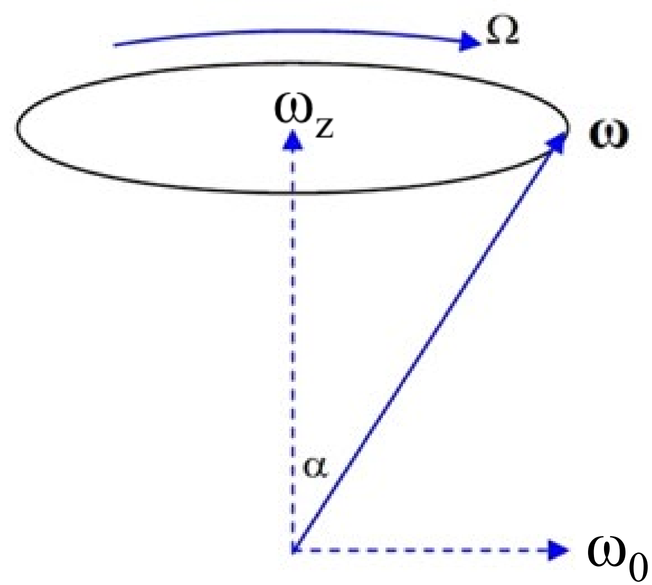






Oblate

z



Prolate

Roterend platform in vrije val: de "body cone"

Geometrische interpretatie:

De x, y en z assen zijn "body-fixed" en roteren mee met het platform.
De oplossingen voor $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ en ω_z geven de componenten van $\boldsymbol{\omega}$ waarbij de bewegende assen worden gevolgd! Met hoeksnelheidssensoren op het platform frame gemonteerd om de componenten van ω te meten, zou dit als resultaat de oplossingen $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ en ω_z van de Euler vergelijkingen hebben opgeleverd.
Vanuit het waarnemerstelsel gezien maakt het platform een tamelijk complexe spin- en tuimelbeweging. Die beschrijving volgt hierna uit de herformulering van de Euler vergelijkingen met het gebruik van Euler hoeken.

De hoeksnelheidsvector $\boldsymbol{\omega}$ voert een precessiebeweging uit om de symmetrie-as z in het "body frame" met hoeksnelheid Ω, de (fictieve) beschreven kegel wordt "body cone" genoemd.
Voor een lichaam met $I > I_0$ (afgeplat) is de precessierichting parallel aan de spinrichting ω_z ("prograde" beweging), voor een lichaam met $I < I_0$ (langgerekt) is de precessierichting anti-parallel aan de spinrichting ω_z ("retrograde" beweging).

Vrij roterend platform gezien vanuit het waarnemerstelsel

- Gegeven is een initieel draai-impulsmoment van het platform als gevolg van een eerder aangebrachte krachtkoppel-impuls. Dit draai-impulsmoment (vector **L**) blijft constant in richting en grootte in het waarnemerstelsel, indien dit wordt beschouwd als een afgesloten systeem.

- Aligneer **L** met de Z-as van het waarnemerstelsel. De kentallen van **L** in dit stelsel (XYZ) zijn dan $\mathbf{L}(0,0,L_Z)$, met $L_Z = |\mathbf{L}| = L$.

- Een coordinaat transformatie van **L** is nu nodig naar het satellietstelsel x, y, z (body-fixed principal axes centre of mass frame) door rotatie over de drie Euler hoeken φ, θ en ψ. Dit is een 3-1-3 transformatie-matrix $[\mathbf{T}]_{\ell\to s}=[\mathbf{T}]_\psi\cdot[\mathbf{T}]_\theta\cdot[\mathbf{T}]_\varphi$

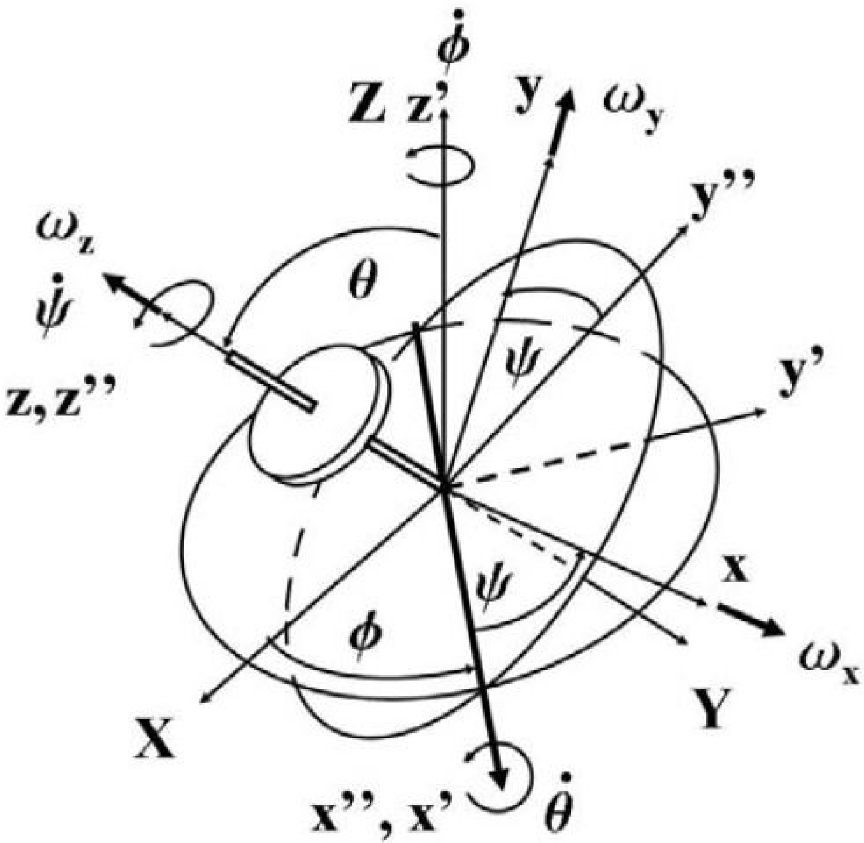
$$[\mathbf{T}]_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{T}]_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, [\mathbf{T}]_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

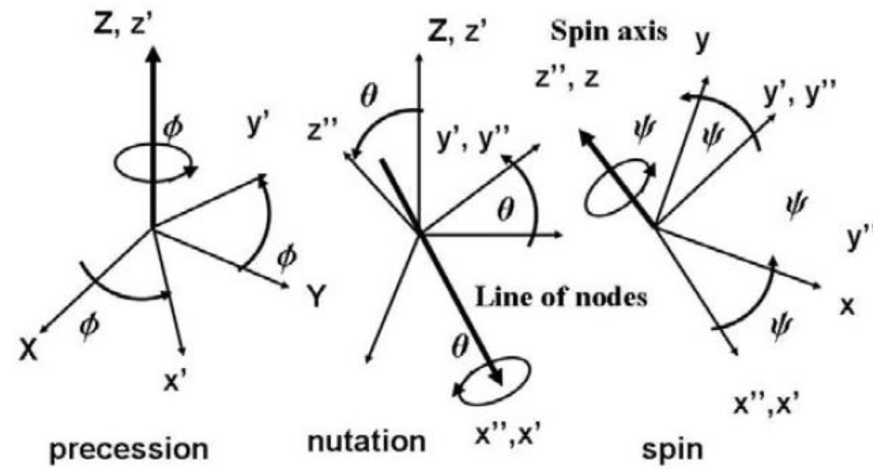
$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\varphi\sin\psi - \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \cos\psi\cos\theta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{bmatrix}$$

- Zijn ***i***, ***j*** en ***k*** de eenheidsvectoren langs de x, y en z-as in het platformstelsel, dan is:

$$\boxed{\mathbf{L} = L\sin\theta\sin\psi\,\boldsymbol{i} + L\sin\theta\cos\psi\,\boldsymbol{j} + L\cos\theta\,\boldsymbol{k}}$$

3-1-3 transformatie naar body-fixed principal axes platform-stelsel





Bepaling van de rotatie vector $\boldsymbol{\omega}$ in het platform-frame

- In het platformstelsel, x ($\boldsymbol{i}$), y ($\boldsymbol{j}$), z ($\boldsymbol{k}$), geldt $L_x = I_x\omega_x$, $L_y = I_y\omega_y$ en $L_z = I_z\omega_z \Rightarrow$
  $L_x = L\sin\theta\sin\psi = \omega_x I_x$, $L_y = L\sin\theta\cos\psi = \omega_y I_y$, $L_z = L\cos\theta = \omega_z I_z$
- De kentallen ω_x, ω_y en ω_z van de momentane rotatie-vector $\boldsymbol{\omega}$ in het platformstelsel kunnen worden afgeleid uit de vectorsom $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}$. Hiertoe moeten de Euler rotatie-vectoren $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ en $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ worden getransformeerd naar het platformstelsel en hun kentallen opgeteld. Met $|\dot{\boldsymbol{\varphi}}| = \dot{\varphi}$, $|\dot{\boldsymbol{\theta}}| = \dot{\theta}$ en $|\dot{\boldsymbol{\psi}}| = \dot{\psi}$ zijn de transformaties:

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_x\\ \dot{\varphi}_y\\ \dot{\varphi}_z\end{bmatrix} = [\mathbf{T}]_\psi\cdot[\mathbf{T}]_\theta\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi,\quad \dot{\varphi}_y = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi,\quad \dot{\varphi}_z = \dot{\varphi}\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_x\\ \dot{\theta}_y\\ \dot{\theta}_z\end{bmatrix} = [\mathbf{T}]_\psi\cdot\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \quad \dot{\theta}_x = \dot{\theta}\cos\psi,\qquad \dot{\theta}_y = -\,\dot{\theta}\sin\psi,\qquad \dot{\theta}_z = 0$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\psi}_x\\ \dot{\psi}_y\\ \dot{\psi}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} \Rightarrow \quad \dot{\psi}_x = 0\qquad \dot{\psi}_y = 0\qquad \dot{\psi}_z = \dot{\psi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\omega} = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\boldsymbol{i} + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\boldsymbol{k}}$$

Algemene differentiaalvergelijkingen voor $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ en $\dot{\psi}$

$$\begin{aligned}
L\sin\theta\sin\psi &= \omega_x I_x = I_x\,(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\\
L\sin\theta\cos\psi &= \omega_y I_y = I_y\,(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\\
L\cos\theta &= \omega_z I_z = Iz\,(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})
\end{aligned}$$

Optelling en aftrekking van de eerste twee vergelijkingen levert uitdrukkingen voor $\dot{\varphi}$ en $\dot{\theta}$, hieruit volgt dan ook een uitdrukking voor de spinsnelheid $\dot{\psi}$:

$$\dot{\varphi} = L\left(\frac{(\cos\psi)^2}{I_y} + \frac{(\sin\psi)^2}{I_x}\right)$$

$$\dot{\theta} = L\left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y}\right)\sin\theta\sin\psi\cos\psi$$

$$\dot{\psi} = L\left(\frac{1}{I_z} - \frac{(\cos\psi)^2}{I_y} - \frac{(\sin\psi)^2}{I_x}\right)\cos\theta$$

Dit vormt een set niet-lineaire eerste-orde-vergelijkingen in φ, θ, ψ en hun tijdsafgeleiden $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$. In het algemeen kunnen deze vergelijkingen slechts numeriek worden opgelost.

Analytische oplossing voor axiale symmetrie

Aanzienlijke vereenvoudiging wordt verkregen bij axiale symmetrie. In dat geval kunnen bovenstaande vergelijkingen analytisch worden opgelost, waarbij het verband tussen $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$,ω en het draai-impulsmoment L en de traagheidsmomenten I_0 en I expliciet wordt. Ga uit van een symmetrische rotator met $I_x = I_y = I_0$ en $I_z = I$. $|\mathbf{L}| = L$ is bekend, evenals de hoek θ tussen **L** en de symmetrie-as van de rotator (hoofdtraagheids-as). De set eerste-orde-vergelijkingen reduceert dan tot:

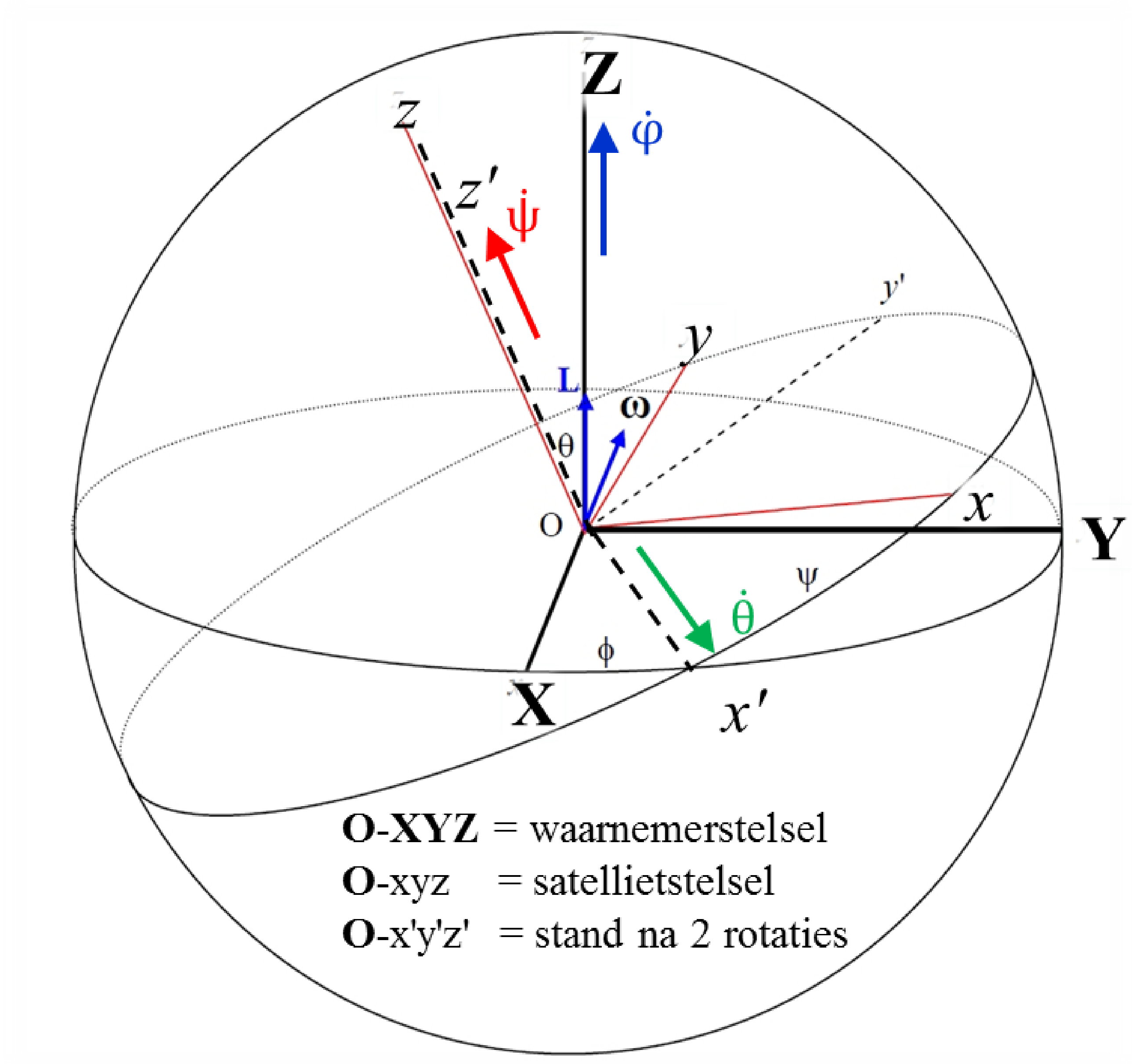
$$\dot{\varphi} = L/I_0 = \text{constant}$$

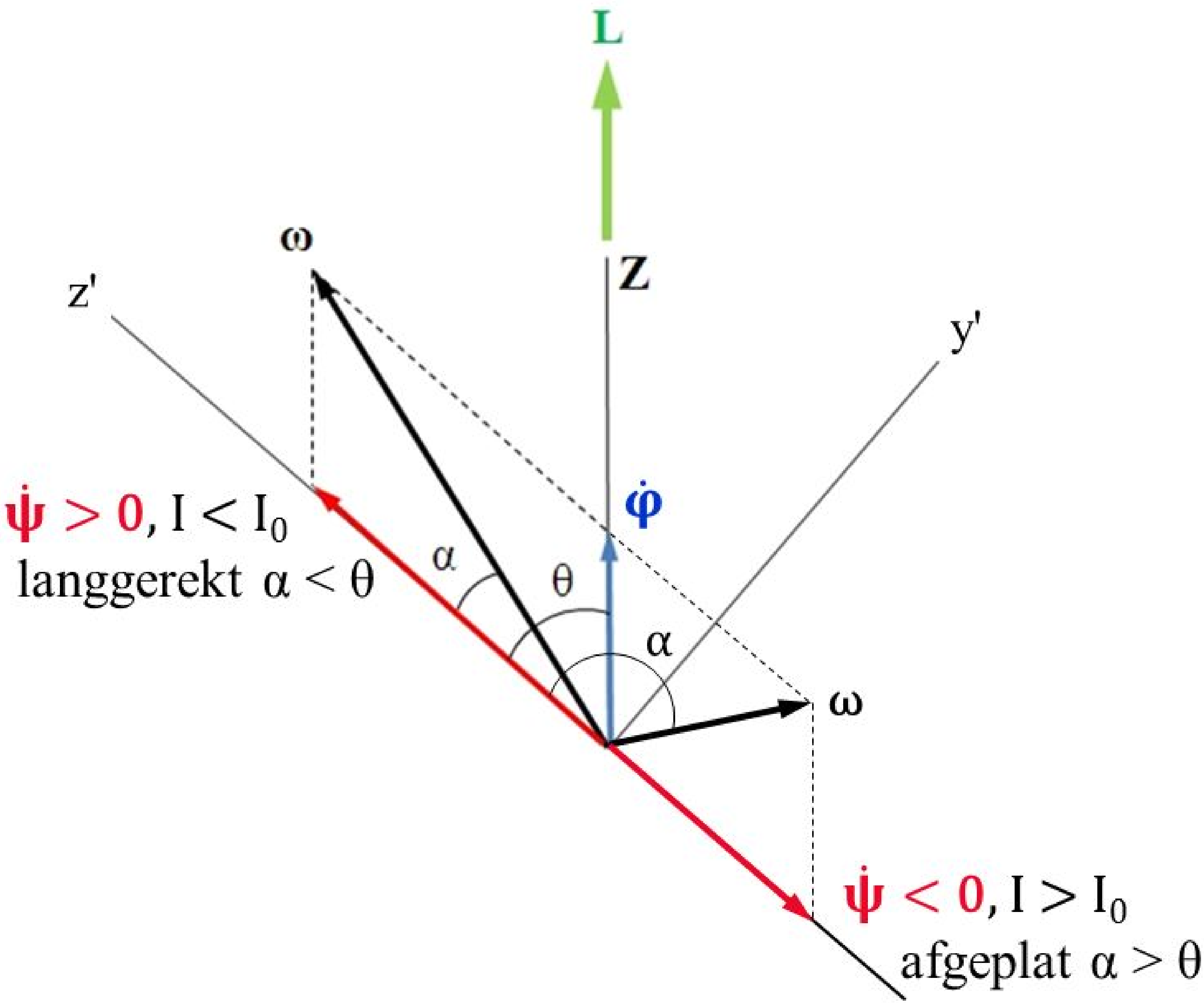
$$\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \text{nutatiehoek} = \text{constant}$$

$$\dot{\psi} = L\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_0}\right)\cos\theta = \text{constant} \quad (\dot{\psi} > 0 \text{ als } I < I_0\text{ , } \dot{\psi} < 0 \text{ als } I > I_0)$$

Met $\dot{\boldsymbol{\theta}} = 0$ wordt de hoeksnelheidsvector $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}$, deze vectoren liggen in één vlak, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ is gericht langs de Z-as van het waarnemerstelsel (evenals **L**), $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ langs de spin-as (z) van het platformstelsel. Dit vlak, waarin Z, z, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ en **L** liggen, staat ⊥ op de "line of nodes" (x'), de as waarover Z naar z' wordt gedraaid bij de tweede Euler rotatie over θ. De y'-as van het x'-y'-z' "tussenstelsel" ligt ook in dit vlak. De onderlinge relatie van de verschillende variabelen kan nu 2-dimensionaal in een plat vlak worden geanalyseerd: de componenten $\omega_{x'}$ en $L_{x'}$ zijn voor dit vlak gelijk aan nul.

Positie van het "tussenstelsel": vlak door Zz' ⊥ x'




L
ω
Z
z'
y'
$\dot{\psi} > 0, I < I_0$
langgerekt $\alpha < \theta$
$\dot{\varphi}$
α
θ
α
ω
$\dot{\psi} < 0, I > I_0$
afgeplat $\alpha > \theta$

Analytische oplossingen voor α, $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ en $\dot{\boldsymbol{\psi}}$

- Voor de hoek α tussen de symmetrie-as en de momentane rotatie-as $\boldsymbol{\omega}$ geldt:
  $\operatorname{tg}\alpha = \omega_{y'}/\omega_{z'} = (I\,L_{y'} / I_0\,L_{z'})$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\alpha = (I/I_0)\operatorname{tg}\theta$
- Voor de grootte van de momentane hoeksnelheidsvector $\boldsymbol{\omega}$ geldt:

$$L = (L_{y'}^2 + L_{z'}^2)^{1/2} = \left(\omega_{y'}^2 I_0^2 + \omega_{z'}^2 I^2\right)^{1/2} = \omega\left(I_0^2 \sin^2\alpha + I^2\cos^2\alpha\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{L}{\left(I_0^2 \sin^2\alpha + I^2\cos^2\alpha\right)^{1/2}}$$

- Voor de grootte van de precessiesnelheid van de symmetrie-as om **L** geldt:

$$\dot{\varphi} = L/I_0 = \frac{\omega\left(I_0^2 \sin^2\alpha + I^2\cos^2\alpha\right)^{1/2}}{I_0} \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega\left(\sin^2\alpha + (I/I_0)^2\cos^2\alpha\right)^{1/2}$$

- Voor de grootte van de spinsnelheid om de symmetrie-as geldt:

$$\dot{\psi} = L\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_0}\right)\cos\theta = L\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_0}\right)\frac{L_{z'}}{L} = \left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_0}\right) I\,\omega\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \omega\,(1 - I/I_0)\cos\alpha$$

$\Rightarrow$ body-fixed coordinaten van de precessievector:

$$(\dot{\boldsymbol{\varphi}})_b = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)\,\boldsymbol{i} + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)\,\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{k}$$

$\Rightarrow$ body-fixed coordinaten van de spinvector:

$$(\dot{\boldsymbol{\psi}})_b = \dot{\psi}\,\boldsymbol{k}$$

$\Rightarrow$ body-fixed coordinaten van de hoeksnelheidsvector:

$$(\boldsymbol{\omega})_b = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)\,\boldsymbol{i} + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)\,\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\boldsymbol{k}$$

Vrije rotatie gezien vanuit het waarneemstelsel: de 'space cone'

De momentane hoeksnelheidsvector ($\boldsymbol{\omega}$) en de symmetrie-as (z') voeren een precessiebeweging uit om de draai-impulsvector **L** in het waarnemerstelsel met een hoeksnelheid $\dot{\varphi}$, waardoor **L** langs de Z-as van het waarnemerstelsel gericht blijft.
De kegelmantel die hiermee door de vector $\boldsymbol{\omega}$ wordt beschreven in het waarnemerstelsel wordt de "space cone" genoemd, deze staat vast in de ruimte.

Voor een langgerekt lichaam ($I < I_0$) is de halve tophoek van de space cone $(\theta - \alpha)$. De grootte van de spinsnelheid $\dot{\psi}$ is positief , evenals de grootte van de precessiesnelheid $\dot{\varphi}$ om de Z-as van het waarnemerstelsel ⇨ draairichting $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ gelijkgericht met $\dot{\boldsymbol{\psi}}$. Dit wordt prograde precessie genoemd.
Voor een afgeplat lichaam ($I > I_0$) is de halve tophoek van de space cone $(\alpha - \theta)$. De grootte van de spinsnelheid $\dot{\psi}$ is negatief en de grootte van de precessiesnelhied $\dot{\varphi}$ is positief ⇨ draairichting $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ tegengesteld gericht aan $\dot{\boldsymbol{\psi}}$. Dit wordt retrograde precessie genoemd.

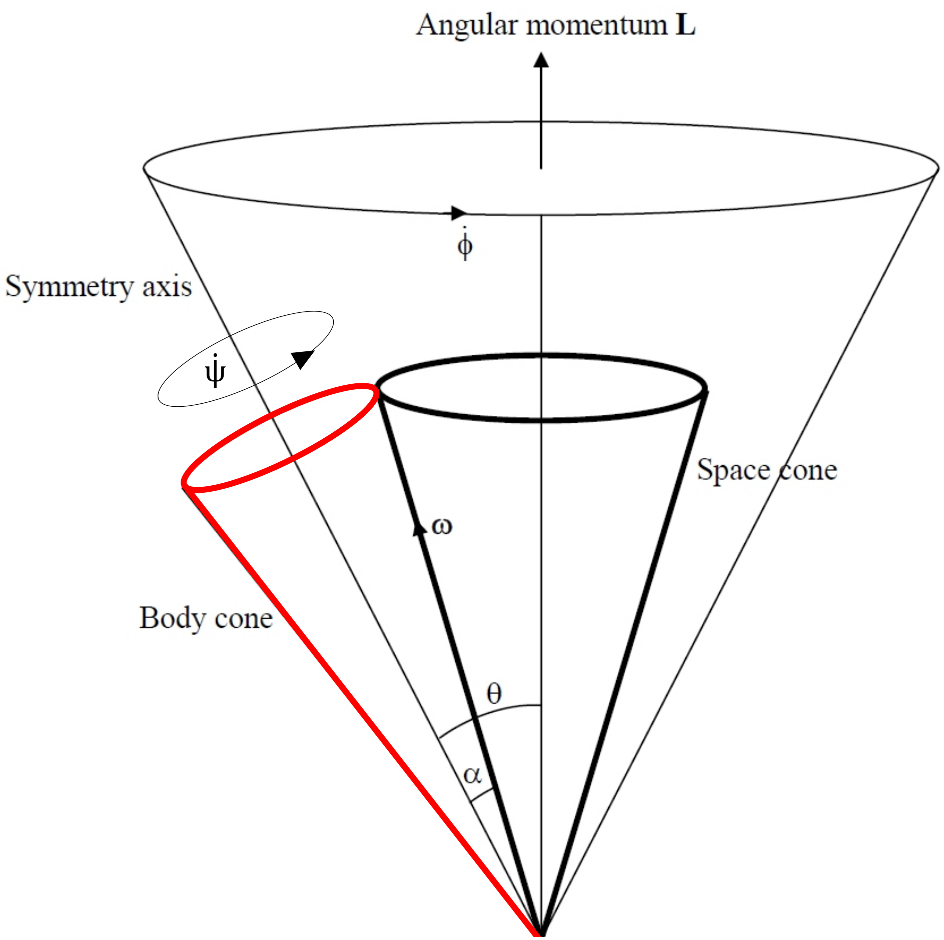
NB. Merk op: de grootte van de spinsnelheid om de symmetrie-as z' zoals afgeleid voor de meebewegende waarnemer in het body frame was:

$$\Rightarrow \Omega = \omega\,(I/I_0 - 1)\cos\alpha = -\,\dot{\psi}$$

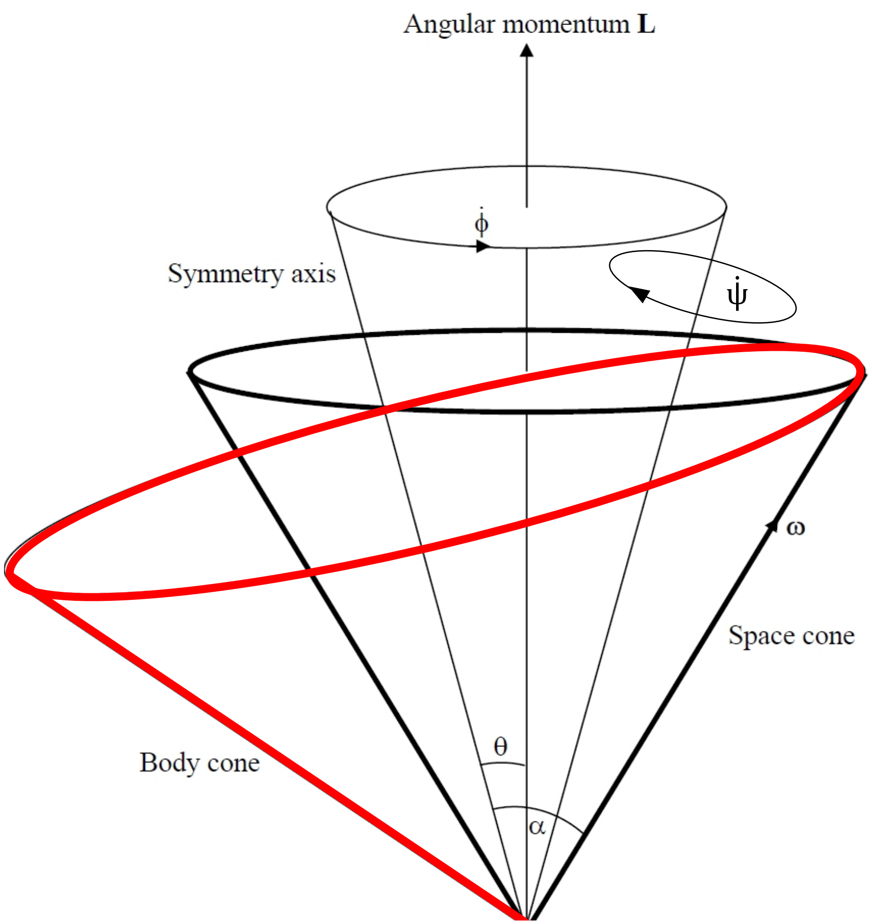
Het minteken geeft aan dat de draairichting gezien vanuit het waarnemer-stelsel tegengesteld is aan die gezien vanuit het verankerde body-stelsel.

Geometrie van vrije rotatie in het waarneemstelsel

Geometrie van vrije rotatie door een lichaam met axiale symmetrie gezien vanuit de positie van een vaste waarnemer in een inertiaalstelsel.



$I < I_0$: langgerekt voorwerp



$I > I_0$: afgeplat voorwerp

Geometrische interpretatie

De geometrische interpretatie is dat de precessie gezien vanuit het waarneemstelsel kan worden beschouwd als het "rollen" van een bewegende virtuele kegel, die is verankerd aan het platform ("body"), over het oppervlak van een onbewegelijke "space cone". De geometrie is zodanig dat voor een langgerekt lichaam de "body cone" mantel over de buitenkant van de "space cone" mantel rolt, bij een afgeplat lichaam rolt de "body cone" mantel met de binnenkant langs de "space cone" mantel. De momentane rotatievector $\boldsymbol{\omega}$ ligt dan langs de momentane contactlijn tussen de "body cone" en de "space cone" ("rolling without slipping"). De verhouding $\rho = I/I_0$ loopt van 0 (naald) tot 2 (gedicteerd door het 'perpendicular axis theorem' voor een symmetrische platte dunne schijf).

Voor een langgerekt lichaam is $0 < \rho < 1$ (bol), for een afgeplat lichaam $1 < \rho < 2$. Voor kleine α tussen $\boldsymbol{\omega}$ en de spin-as z' geldt in eerste benadering:

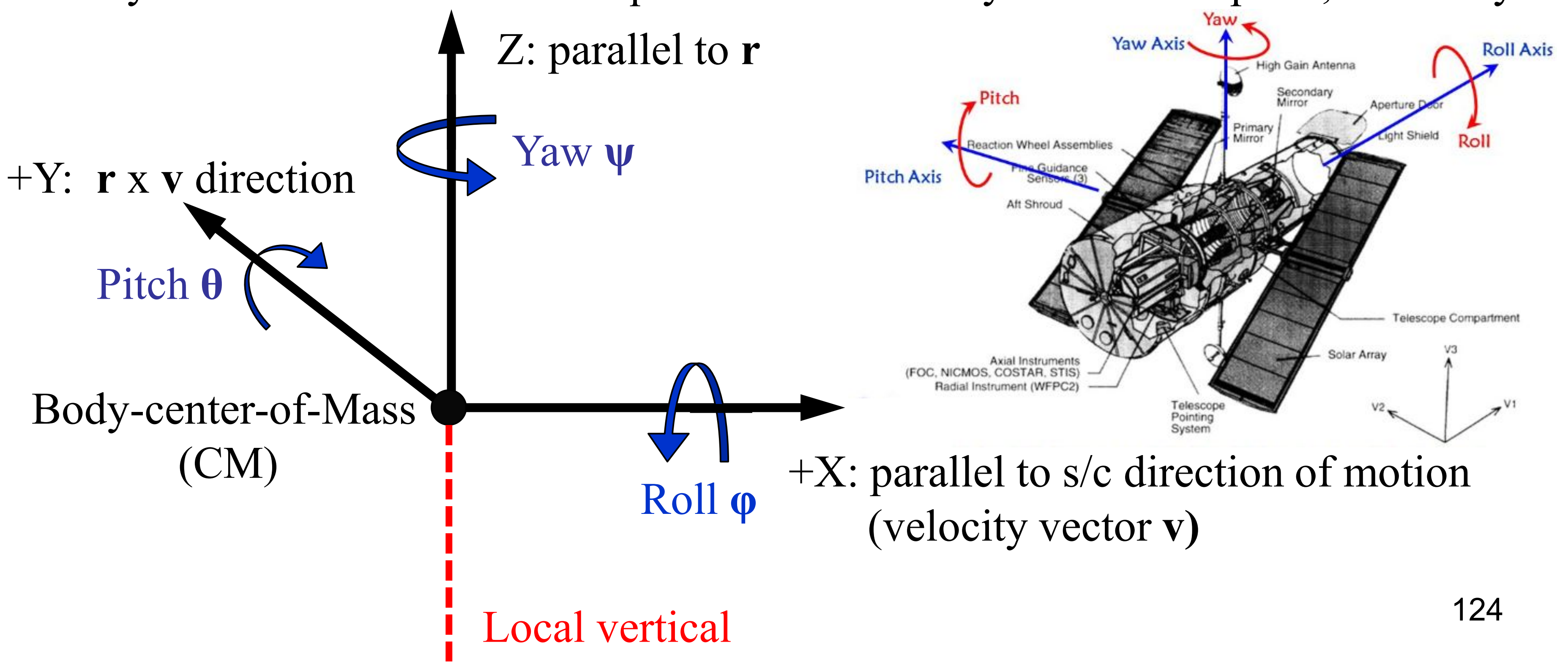
$$\dot{\varphi} / \dot{\psi} = \rho/(1-\rho)$$

Voor een naaldvormig lichaam ($\rho \ll 1$) volgt dan $\dot{\varphi} \approx \rho\dot{\psi}$: de precessiesnelheid is veel langzamer dan de spinsnelheid $\dot{\psi}$. Voor een afgeplat lichaam geldt $|\dot{\varphi}| > |\dot{\psi}|$. Specifiek voor een symmetrische dunne schijf ($\rho \approx 2$, schotel of 'frisbee') geldt voor de precessiesnelheid (de "wobbling") dat $\dot{\varphi} \approx -2\dot{\psi}$: twee maal hoger dan de spinsnelheid $\dot{\psi}$ van de schijf en in tegengestelde draairichting.

Reference system and set of orientation angles in practical use for describing aircraft and spacecraft motions.

- Roll, pitch and yaw system (RPY-system)
- Represented by an Euler angle set (φ, θ, ψ) corresponding to the roll, pitch and yaw angles of the spacecraft body frame relative to a rotating local vertical frame, nominally taken to be the inertial reference frame. This local frame is often referenced to the spacecraft velocity vector **v** (+X-axis) and not the local horizontal.

The Euler angle rotation sequence that rotates the local inertial frame into the s/c body frame involves a 2-1-3 sequence of elementary rotations in pitch, roll and yaw.



Transformation matrices for the RPY system

The transformation matrix $[\mathbf{T}]_{\ell\to B}$ for expressing a set of body-fixed coordinates (x_B, y_B, z_B) in a set of local coordinates (x_ℓ, y_ℓ, z_ℓ) of an initial local reference frame by sequential rotation through a pitch angle θ, a roll angle φ and a yaw angle ψ (2-1-3 sequence) is delineated by the combination of the following three elementary matrices:

$$[\mathbf{T}]_{\ell\to B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{(yaw)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\text{(roll)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{(pitch)}},$$

Hence, the body coordinates are expressed in terms of the local coordinates as:

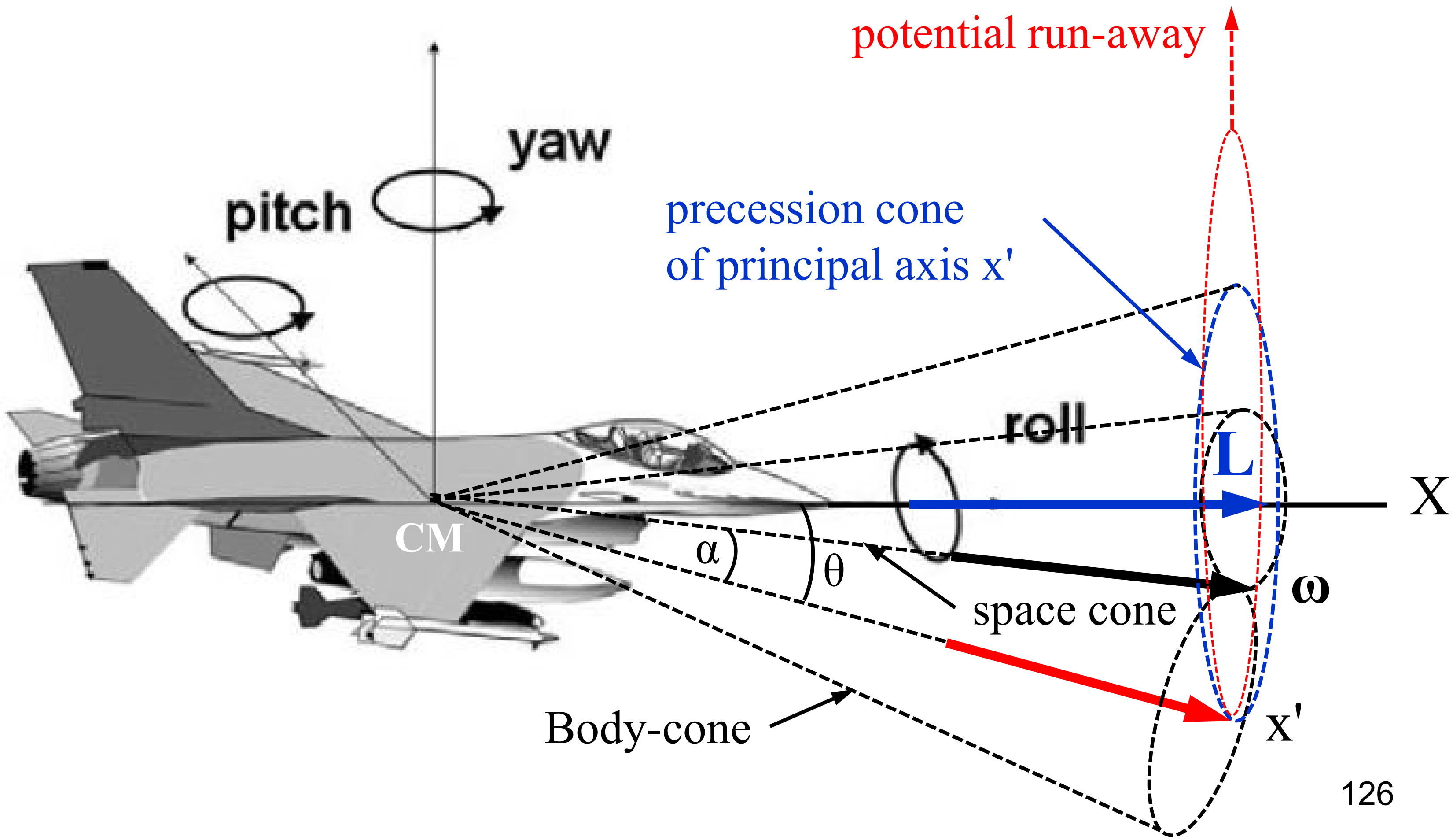
$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi & \cos\theta\sin\varphi\sin\psi - \cos\psi\sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta\sin\varphi - \cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & \cos\theta\cos\psi\sin\varphi + \sin\theta\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\ell \\ y_\ell \\ z_\ell \end{bmatrix}$$

Since the transformation matrix $[\mathbf{T}]_{\ell\to B}$ is orthonormal, the inverse transform follows from $[\mathbf{T}]_{B\to\ell} = [\mathbf{T}]^T_{\ell\to B}$ where $[\mathbf{T}]^T_{\ell\to B}$ is the transposed matrix of $[\mathbf{T}]_{\ell\to B}$. The local coordinates can thus be expressed in terms of the body coordinates as:

$$\begin{bmatrix} x_\ell \\ y_\ell \\ z_\ell \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]^T_{\ell\to B} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix}$$

Roll coupling in fighter planes

Take $I_y = I_z = I_0$, F16 fighter plane is a low aspect ratio aircraft: roll-inertia smaller than pitch- and yaw-inertia ⇨ $I_{roll} = I < I_0$. Neglect aerodynamic forces ⇨ free body spinning solution is applicable. Response to application of an impulsive torque on the roll-axis (X-axis = no principal axis!) ⇨ initiation of coning motion (potential run-away caused by instabilities due to disturbing aerodynamic torques!).



Instabiliteit en energieverlies

1. Als $I_x \neq I_y \rightarrow$ precessie in het "body frame" $\Omega^2 = \omega_z^2(I_z - I_y)(I_z - I_x)/I_x I_y$.
   Indien $I_x < I_z < I_y \rightarrow \Omega^2 < 0$, geen vaste nutatiehoek, hoek groeit hyperbolisch tot rotatie om minimum of maximum traagheidsas.
   Rotatie van een ideaal stijf lichaam om de extremen in de traagheidsassen is stabiel tegen kleine stoorkoppels, rotatie om een intermediaire traagheidsas is instabiel tegen zulke koppels!

2. In werkelijkheid treedt altijd energie dissipatie op (flexibele structuur, flexibele antennes) $\rightarrow$ afname rotatie-energie, bij constant blijven van het draai-impulsmoment. Neem de volgende (scalaire) gelijkheden:

$$E_{rot} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \quad \rightarrow E_{rot} \text{ neemt af}$$
$$L = I\omega \rightarrow E_{rot} = \tfrac{1}{2} L^2/I \quad \rightarrow I \text{ moet toenemen!}$$

   Dit gebeurt door toename van de nutatiehoek tot 90^o, waardoor het lichaam om de maximum traagheidsas gaat draaien: "flat spin".
   Dit is de hoofdasregel voor stabiele vrije rotatie in een realistisch geval.
   Vb. Explorer 1 in februari 1958: lange-as spin-gestabiliseerde satelliet.

Stoorkoppels (disturbance torques)

- Aerodynamisch (wrijving in de bovenste atmosfeerlaag)
- Zwaartekracht-gradiënt
- Stralingsdruk van de zon
- Magnetisch (wisselwerking met het aardse magneetveld)
- Ruimtevaartuig-gegenereerd tijdens operatie

Aerodynamisch koppel (aerodynamic torque)

De bovenste lagen van de dampkring veroorzaken een aerodynamische wrijvingskracht $\mathbf{F}_a$ op het ruimtevaartuig. Het hierdoor uitgeoefende stoorkoppel is:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_{cp} \times \mathbf{F}_a$$

met $\mathbf{r}_{cp}$ de vector, in het "body frame", tussen het massamiddelpunt van het ruimtevaartuig en het drukmiddelpunt ("centre of pressure") t.g.v. de aerodynamische wrijvingkracht $\mathbf{F}_a$:

$$\mathbf{F}_a = -\tfrac{1}{2}\,\rho|\mathbf{v}|^2 A_p C_w \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$$

ρ = atmosferische dichtheid
$\mathbf{v}$ = snelheidsvector van het ruimtevaartuig
$\tfrac{1}{2}\,\rho|\mathbf{v}|^2$ = dynamische druk van de luchtstroming
A_p= geprojecteerde oppervlak van het ruimtevaartuig $\perp$ $\mathbf{v}$
C_w= wrijvingscoefficiënt (waarde tussen 1 en 2)

Vb. satelliet met $A_p = 5\ m^2$ op 400 km hoogte in een circulaire baan (standaard atmosfeer $\rho = 4 \times 10^{-12}\ kg/m^3$) $\rightarrow$ $|\mathbf{T}|/|\mathbf{r}_{cp}| = 1{,}2 \times 10^{-3}$ Newton.
Voor $|\mathbf{r}_{cp}|$ = 1-10 cm, $|\mathbf{T}| \approx 10^{-4}$–$10^{-5}$ Newton·m $\rightarrow$ typische drift > 1^o per 1000 sec

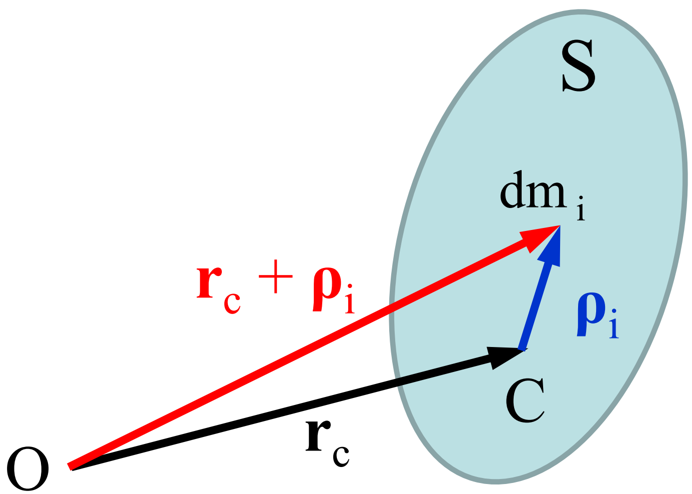
Koppel t.g.v. zwaartekracht-gradiënt (gravity gradient torque)

Newton's gravitatiewet $1/r^2 \rightarrow$ ruimtevaartuig in baan ondervindt differentiële aantrekking door verschil "boven-" en "onderkant".

Koppel $\mathbf{T}$ tengevolge van zwaartekracht-gradiënt over afstandsvector $\boldsymbol{\rho}_i$:

$$\mathbf{T} = \int \boldsymbol{\rho}_i \times d\mathbf{F}_i \text{ , met gravitatiewet } d\mathbf{F}_i = GMdm_i \, (\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}_i) \, / \, |\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}_i|^3$$

G = gravitatie-constante, M = massa planeet, dm_i = massa-elementje,
C = massamiddelpunt ruimtevaartuig, O = massamiddelpunt planeet.



Oplossing is in goede benadering ($r_c = |\mathbf{r}_c|$):

$$\mathbf{T} \approx (3GM/r_c^3) \, \check{\mathbf{r}} \times [\mathbf{I}] \, \check{\mathbf{r}}$$

$[\mathbf{I}]$ = traagheidsmatrix, $\check{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_c/r_c$ = eenheidsvector planeet ⇨ satelliet

Vervolgens $\check{\mathbf{r}}$ van "orbit frame" $(0,0,1)^T$ roteren naar het 'body frame' (*b*) over Eulerhoeken θ, φ en ψ (pitch-, roll- en yaw-hoeken). Dit levert (voor kleine hoeken) $\check{\mathbf{r}}_b\,(-\theta, \varphi, 1)^T$ ⇨ stoorkoppel in "body frame":

$\mathbf{T}_b = [T_x, T_y, T_z]_b^T = (3GM/r_c^3)[(I_z - I_y)\varphi, (I_z - I_x)\theta, 0]^T$: orde $10^{-4/-5}$ Newton·m/graad.

Koppel wil het ruimtevaartuig richten langs as met de kleinste traagheid, langgerekte ruimtevaartuigen worden sterker beïnvloed dan meer sferische!

Koppel t.g.v. stralingsdruk door de zon

Stralingsdruk door bestraling van het ruimtevaartuig door de zon veroorzaakt een stoorkoppel:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_{oc} \times \mathbf{F}_s$$

met $\mathbf{r}_{oc}$ de vector, in het "body frame", tussen het massamiddelpunt van het ruimtevaartuig en het stralingsdrukmiddelpunt ("optical centre of pressure") t.g.v. de geïntegreerde stralingsdruk $\mathbf{F}_s$ over het r-vaartuig.

$$\mathbf{F}_s = A_\perp (1 + \varepsilon_r)\, \mathbf{p}_s$$

$|\mathbf{p}_s|$ = stralingsdruk I_s/c

I_s = stralingsintensiteit van de zon (1358 Watt/m^2 bij de aarde)

c = lichtsnelheid $2{,}9979.10^8$ m/sec

ε_r = reflectiviteit van het ruimtevaartuig ($0 < \varepsilon_r < 1$)

$A_\perp$ = oppervlak ruimtevaartuig geprojecteerd loodrecht op de zonvector

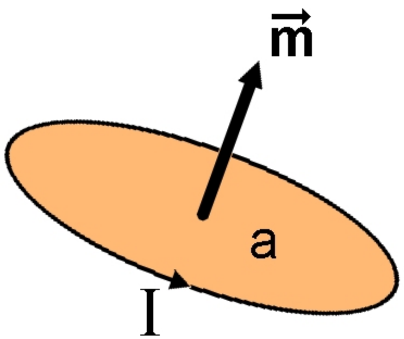
Vb. Satelliet met $A_\perp = 5$ m^2 in een baan om de aarde, $\varepsilon_r = 0{,}5$, $|\mathbf{r}_{oc}| = 10$ cm
$|\mathbf{T}| \approx 4 \times 10^{-6}$ Newton·m → 2 ordes beneden het aerodynamische koppel op 400 km hoogte. Stralingsdruk is onafhankelijk van de baanhoogte → overheerst vaak > 1000 km, stoorkoppel van primaire orde bij geostationaire satellieten.

Koppel t.g.v. een planetair magnetisch veld

De aarde en andere planeten zoals Jupiter en Saturnus bezitten een aanzienlijk magnetisch veld. Dit veroorzaakt een stoorkoppel:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

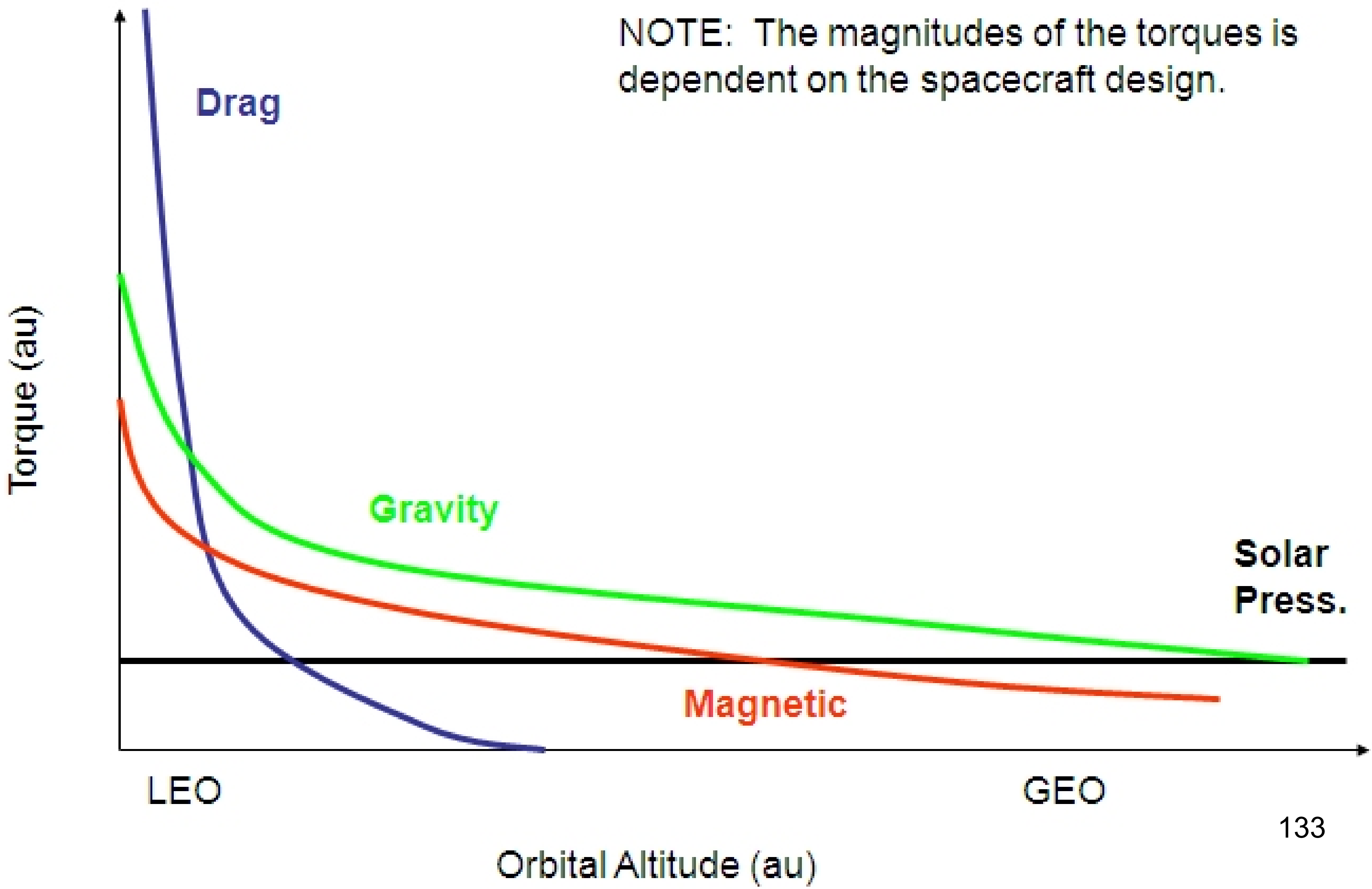
met **m** het magnetisch dipoolmoment van het ruimtevaartuig tengevolge van stroomlussen en restmagnetisatie, vector **B** is de sterkte van het planetaire magneetveld uitgedrukt in "body frame" coordinaten.



Dipoolmoment gegenereerd door een enkelvoudige stroomlus $\mathbf{m} = I\mathbf{a}$, I = stroomsterkte, **a** oppervlakte-vector $\perp$ op de lus. Voor een spoel is **m** evenredig met het aantal windingen w, dimensie Awm^2.

Vb. Aardmagneetveld **B** (evenredig met $1/|\mathbf{r}|^3$, $\mathbf{r}$ = plaatsvector van planeet naar ruimtevaartuig) op 200 km hoogte $\approx 3 \cdot 10^{-5}$ Tesla (0.3 Gauss), een satelliet met een $\mathbf{m} \approx 0{,}3\ Awm^2$ ondervindt dan een magnetisch stoorkoppel van $\approx 10^{-5}$ Newton.m.

External Disturbance Torques



Disturbance	FireSat Example
Gravity-gradient	For R = (6,378 + 700) km = 7,078 km; $I_z = 90\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, $I_y = 60\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ and θ = 1 deg (normal mode) or 30 deg (optional target-of-opportunity mode): normal: $T_g = \dfrac{(3)(3.986\times10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2)(30\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\sin(2\text{deg})}{(2)(7.078\times10^6\ \text{m})^3}$ $= 1.8\times10^{-6}\ \text{N}\cdot\text{m}$ optional target-of-opportunity: $T_g = 4.4\times10^{-5}\ \text{N}\cdot\text{m}$
Solar Radiation	For a 2 m by 1.5 m spacecraft cross-section, a center-of-solar-pressure to center-of-mass difference of 0.3 m, incidence angle of 0 deg and coefficient of reflectivity of 0.6. $T_{sp} = (1{,}367\ \text{W/m}^2)\ (2\text{m}\times1.5\text{m})\ (0.3\text{m})\ (1+0.6)\ (\cos 0\ \text{deg})\ /\ (3\times10^8\ \text{m/s})$ $= 6.6\times10^{-6}\ \text{N}\cdot\text{m}$
Magnetic Field	For R = 7,078 km, a spacecraft magnetic dipole of 1 $\text{A}\cdot\text{m}^{2*}$ and the worst-case polar magnetic field, $M = 2\ (7.96\times10^{15}\ \text{tesla}\cdot\text{m}^3)/(7.078\times10^6\ \text{m})^3$ $= 4.5\times10^{-5}$ tesla (= 0.45 gauss) $T_m = 1\times4.5\times10^{-5} = 4.5\times10^{-5}\ \text{N}\cdot\text{m}$
Aerodynamics	For illustration purposes we assume a 3 m^2 surface, offset from the center of mass by 0.2 m. In a 700-km orbit the velocity is ≈ 7,504 m/s, the atmospheric density (ρ) is ≈ 10^{-13} kg/m^3. For C_d, the drag coefficient, use 2.0. $F = 1/2\ [(10^{-13}\ \text{kg/m}^3)\ (2)(3\ \text{m}^2)\ (7{,}504\ \text{m/s})^2] = 1.7\times10^{-5}\ \text{N}$ $T = FL = 1.7\times10^{-5}\ \text{N}\ (0.2\ \text{m}) = 3.4\times10^{-6}\ \text{N}\cdot\text{m}$ This is small. At a 100-km orbit, however, $\rho = 10^{-9}$ kg/m^3. This results in $T = 3.3\times10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m}$, which is significant for our small spacecraft.

Ruimtevaartuig-intern gegenereerde stoorkoppels

Voorbeelden:

- Aligneringsnauwkeurigheid in de stuurraketten (~ 0.1° – 0.5°)
- "Mismatch" tussen de stuurraketten (~5%)
- Roterende componenten
- Klotsen van vloeistoffen (bv. brandstof)
- Flexibele structuren
- Beweging door bemanning

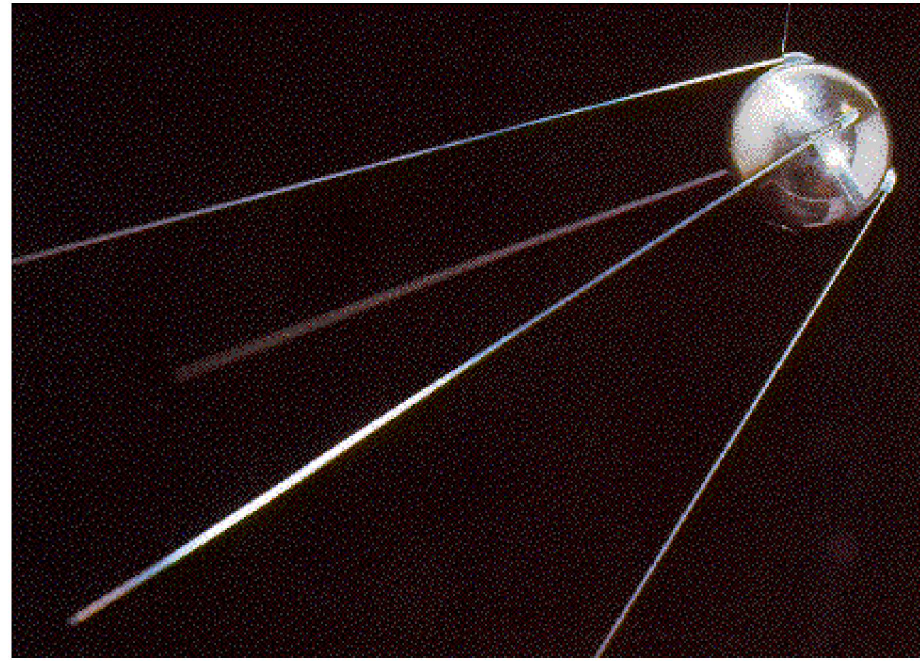
"Passieve" standregeling

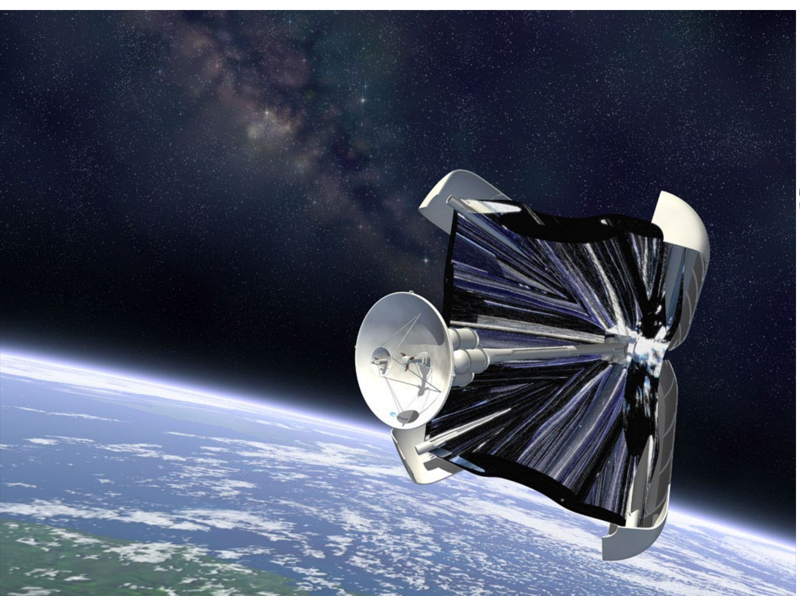
Gebruik van wisselwerking met de omgeving voor stabilisatie en controle

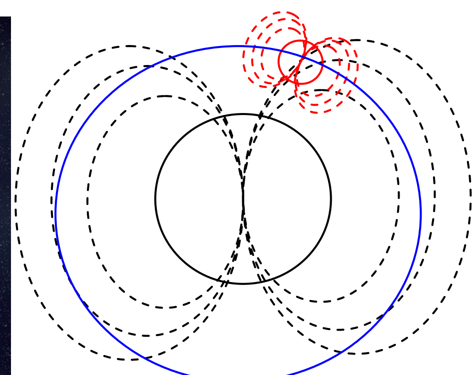
"Passieve" standregeling

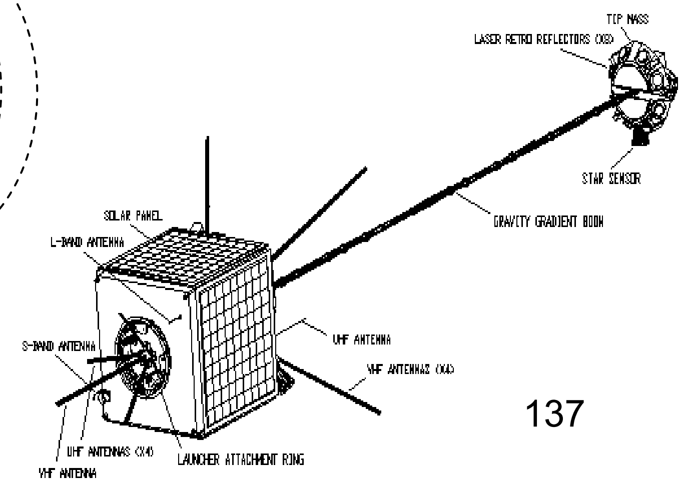
Stoorkoppels geïnduceerd door de omgeving van het ruimtevaartuig kunnen ook worden aangewend voor "passieve" standregeling:

- Gravity Gradient Boom
- Aero-fins
- Magnetic Torque Rods
- Solar Sails



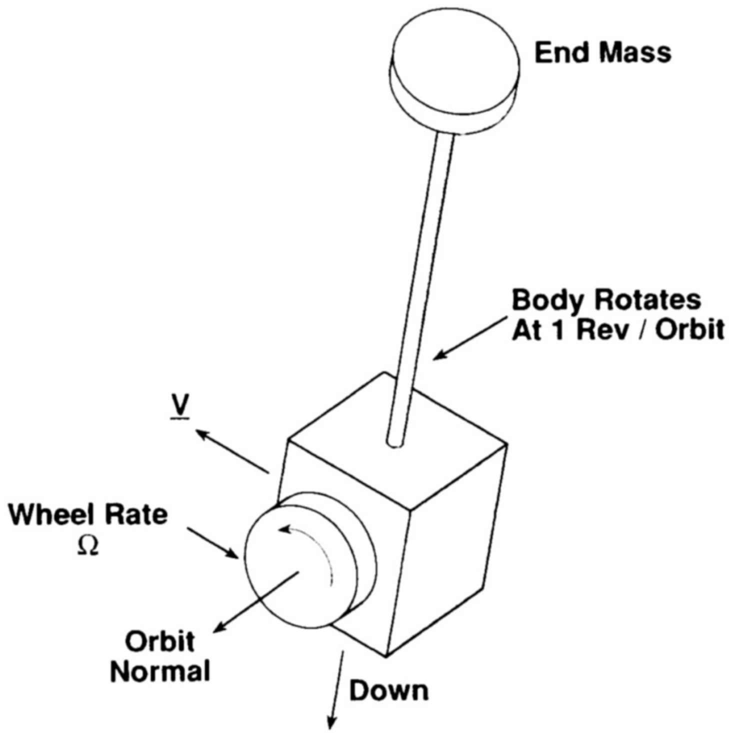






"Passieve" standregeling

Vb. Zwaartekracht-gradiënt stabilisatie voor een satelliet in een lage baan waarbij waarneeminstrumenten in de nadir of zenith richting moeten worden gericht (locale verticaal). Dit vereist een traagheidsas $I_z \ll I_x, I_y$

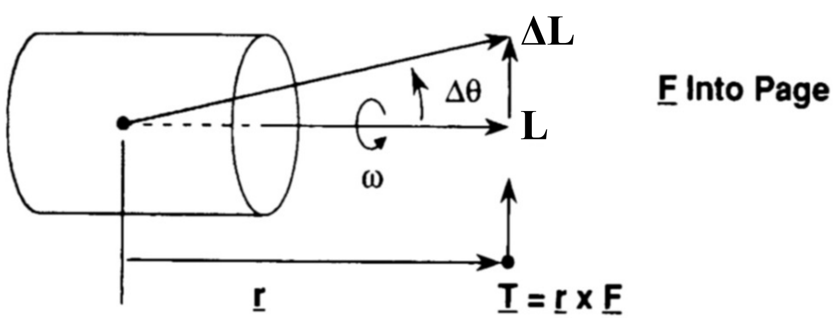


Realisatie m.b.v. een lange arm ("boom") met grote massa aan het uiteinde langs de body z-as (= locale verticaal).
Stabilisatie ongevoelig voor rotatie om de z-as ("yaw"- hoek ψ stabiliteit).
Deze stabilisatie kan worden verkregen door toevoeging van een reactiewiel dat een draai-impulsvector **L** genereert loodrecht op het baanvlak. Gebruikt bij laagvliegende radarsatellieten.

Stabilisatie ~1°, lange levensduur 15 jaar+

"Passieve" standregeling: spinstabilisatie

Spinstabilisatie maakt gebruik van de gyroscopische "stijfheid" van een roterend lichaam om een oriëntatie in een inertiaal stelsel te behouden.
Zonder externe stoorkoppels behoudt de door de spin veroorzaakte draai-impulsvector $\mathbf{L}_{spin}$ zijn richting en grootte in de ruimte.



Een uitwendig opgelegd koppel kan worden gesplitst in ∥ en ⊥ componenten t.o.v. $\mathbf{L}_{spin}$.
∥ vergroot of verkleind $\mathbf{L}_{spin}$
⊥ verandert de richting van $\mathbf{L}_{spin}$

$$|\mathbf{\Delta L}| = |\mathbf{L}|\Delta\theta = |[\mathrm{I}]\boldsymbol{\omega}|\,\Delta\theta$$

$$|\dot{\mathbf{L}}| = |\mathbf{T}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \approx |\mathbf{\Delta L}|/\Delta t \rightarrow \Delta\theta \approx |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\,\Delta t/\,|\mathbf{L}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\,\Delta t/\,|[\mathrm{I}]\boldsymbol{\omega}|$$

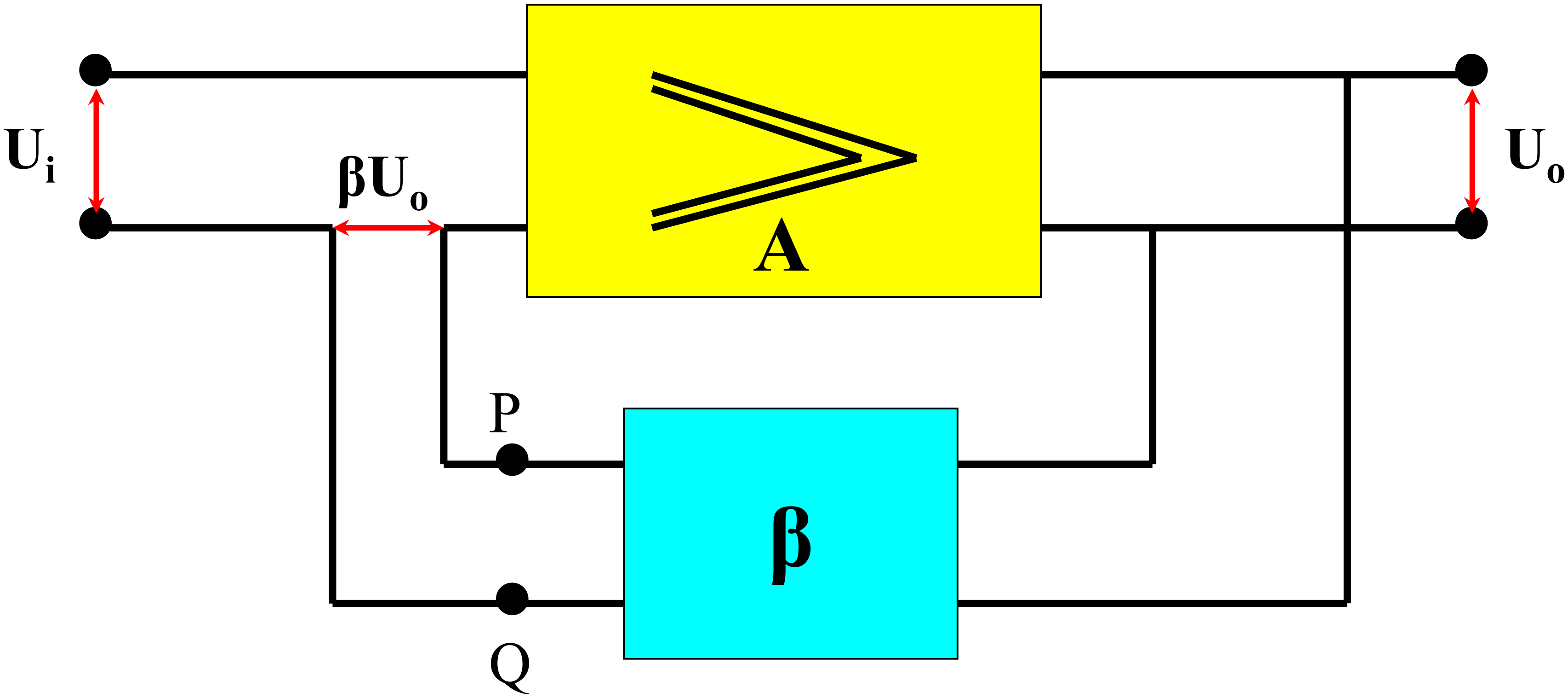
De gyroscopische "stijfheid" verschijnt als |**L**| in de noemer van Δθ, des te hoger deze waarde des te kleiner is de afwijking Δθ t.g.v. een extern (stoor)koppel op de stand van de satelliet.

Actieve Standregeling

Stabilisatie en Controle
door terugkoppeling (feedback)

Terugkoppeling bij een versterkend element

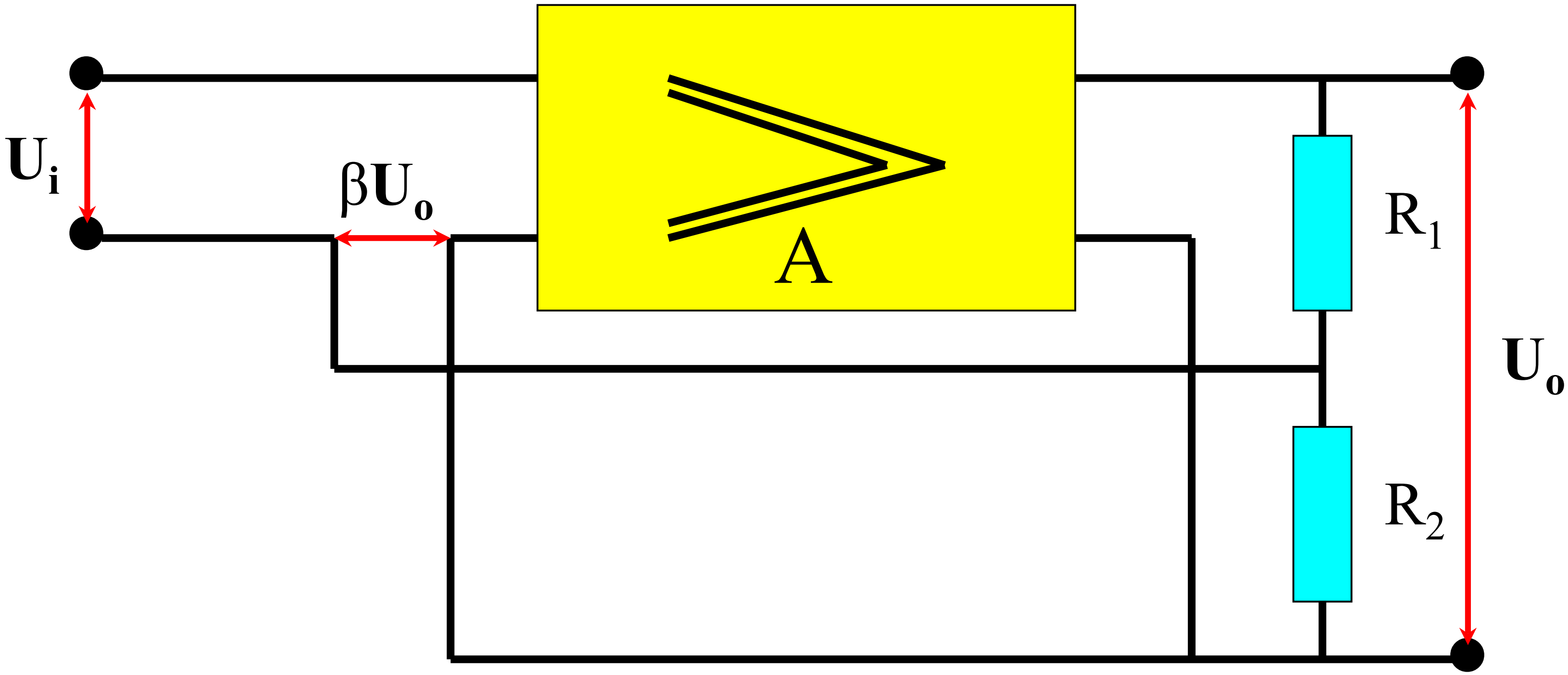
Algemeen: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(j\omega)$ = complexe grootheid
$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(j\omega)$ = complexe grootheid



$\mathbf{A^*} = \mathbf{U_o/U_i} = \mathbf{A}/(1 - \mathbf{A\beta})$, $|1 - \mathbf{A\beta}| > 1$ tegenkoppeling
$|1 - \mathbf{A\beta}| < 1$ meekoppeling

Stabilisatie door terugkoppeling

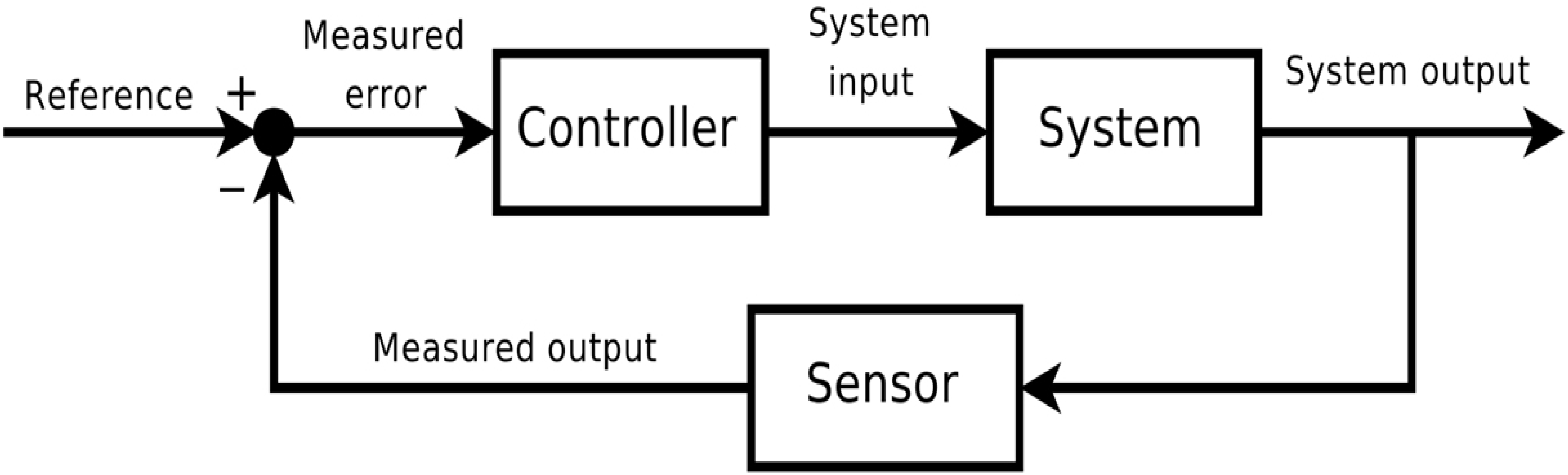
Vereenvoudiging in dit voorbeeld: A en β zijn reëel



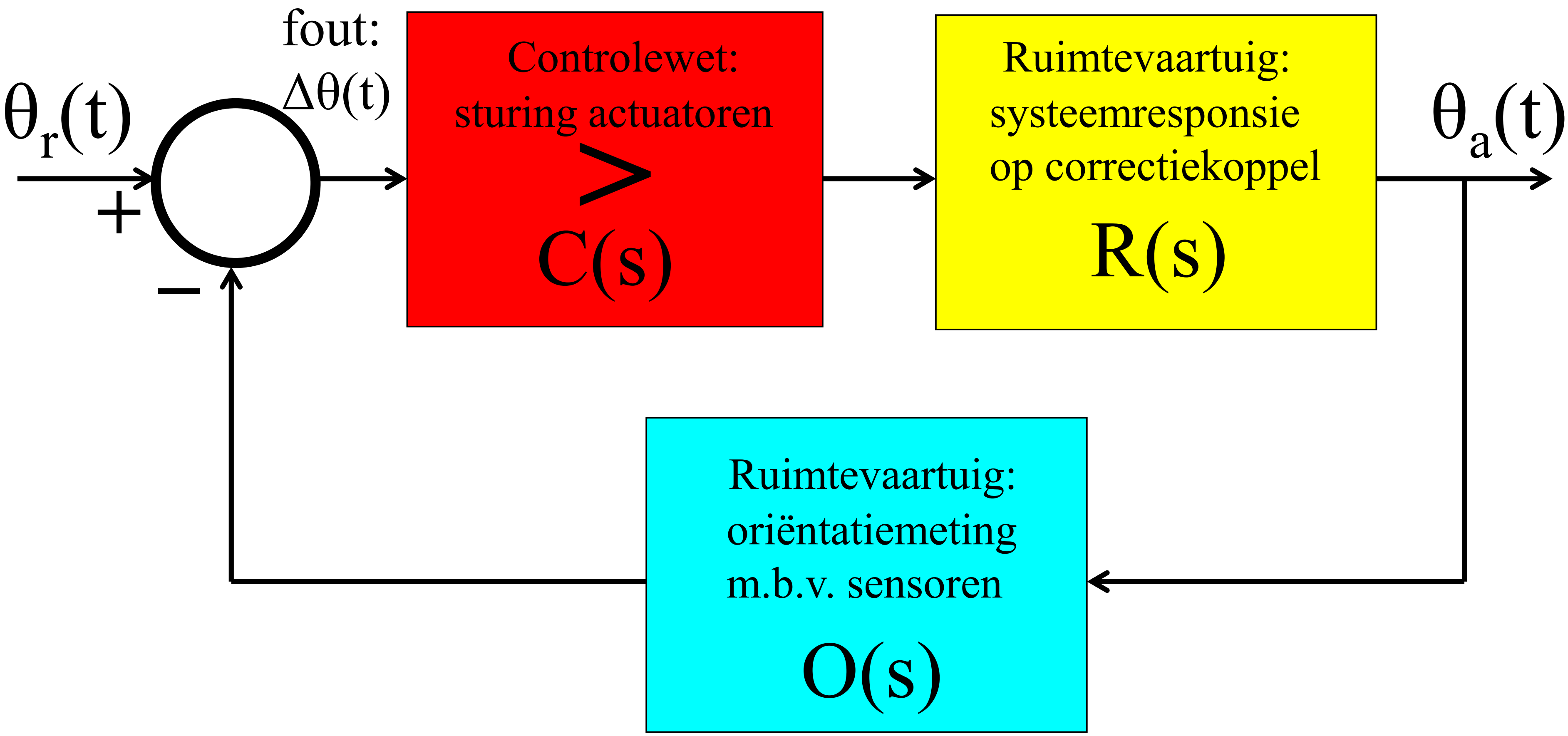
$\beta = R_2/(R_1 + R_2)$, met $-A\beta \gg 1 \rightarrow A^* \approx -1/\beta$

Vb. $A = -10^6$ en $\beta = 10^{-4} \rightarrow -A\beta = 100$, $A^* \approx -10^4$
Verandert A naar -5×10^5 (factor 2), A^* met slechts 1%!

Gesloten lus controle systemen (closed loop control systems)



Standcontrole door terugkoppeling (1-assig)



Controlewet: specificeert de grootte van het correctiekoppel dat moet worden aangebracht als reactie op een gegeven hoekfout.

Systeemmodel: lineair en tijdsinvariant (LTI)

Betekenis: de signaalresponsie in het tijdsdomein wordt beschreven door een lineaire differentiaalvergelijking (LDV) met constante coëfficiënten.

Oplossing.
Transformatie naar frequentiedomein (Laplace/Fourier transformatie): de differentiaalvergelijking gaat dan over in een polynoomvergelijking die algebraïsch kan worden opgelost.

$\theta_r(t) \leftrightarrow \theta_r(s)$: input, $s = \alpha + i\omega$ = complexe frequentie
$\theta_a(t) \leftrightarrow \theta_a(s)$: output
R(s) : polynoom die de dynamica van het ruimtevaartuig beschrijft (= frequentiekarakteristiek)
C(s) : frequentiekarakteristiek van de controlewet (= fysisch model)
O(s) : frequentiekarakteristiek van de standsensoren.

Relatie input-output van het standregelsysteem

$$H(s) = \theta_a(s)/\theta_r(s) = R(s)C(s)/[1+O(s)R(s)C\,(s)]$$

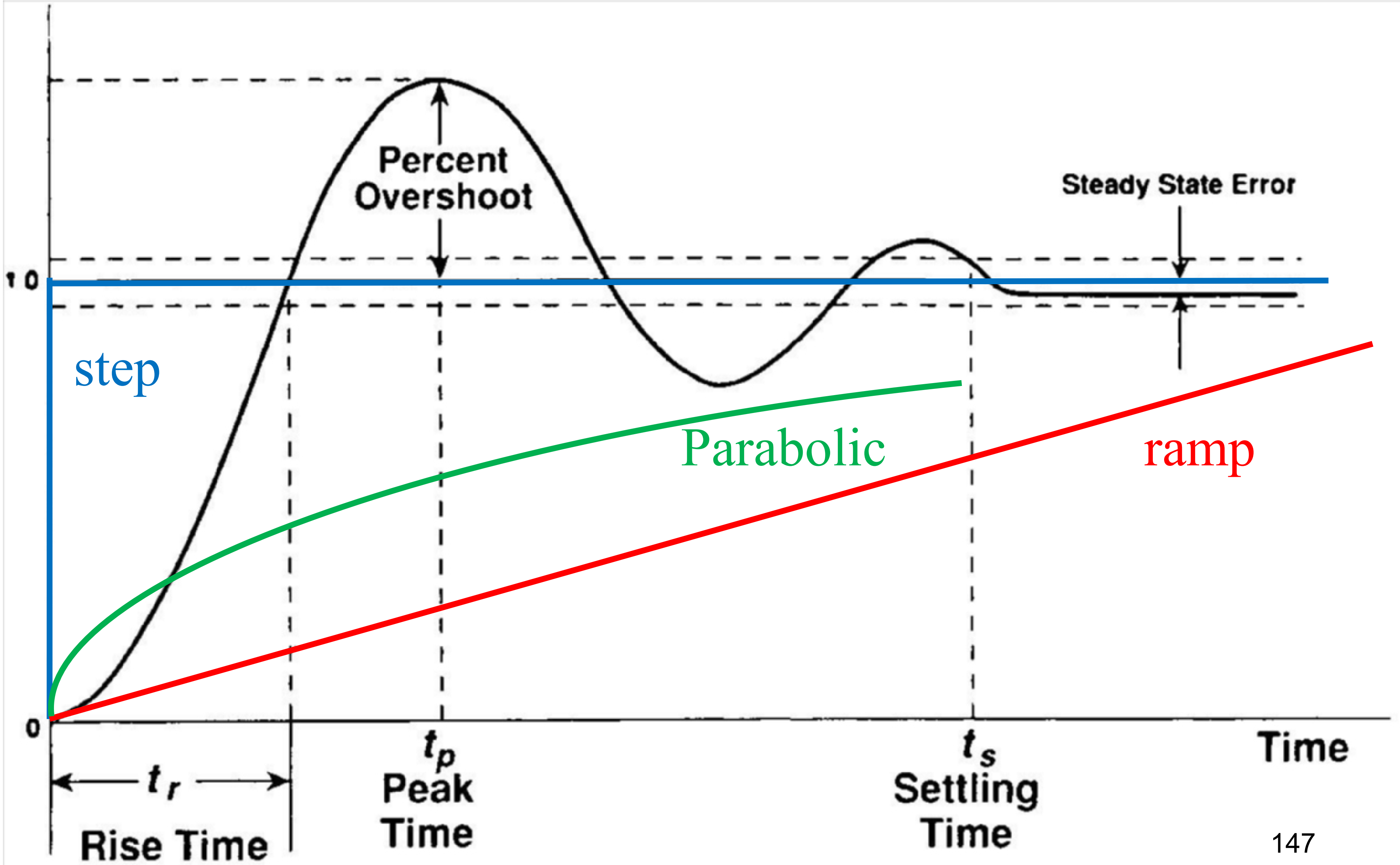
H(s) heet de overdrachtsfunctie van het standregelsysteem.
Terugtransformatie van H(s) naar het tijdsdomein $H(s) \leftrightarrow h(t)$.
h(t) = impulsresponsie van het standregelsysteem = tijdsafgeleide van de responsie op een stapsgewijze verandering.
De noemer van de overdrachtsfunctie:

$$[1+O(s)R(s)C\,(s)]$$

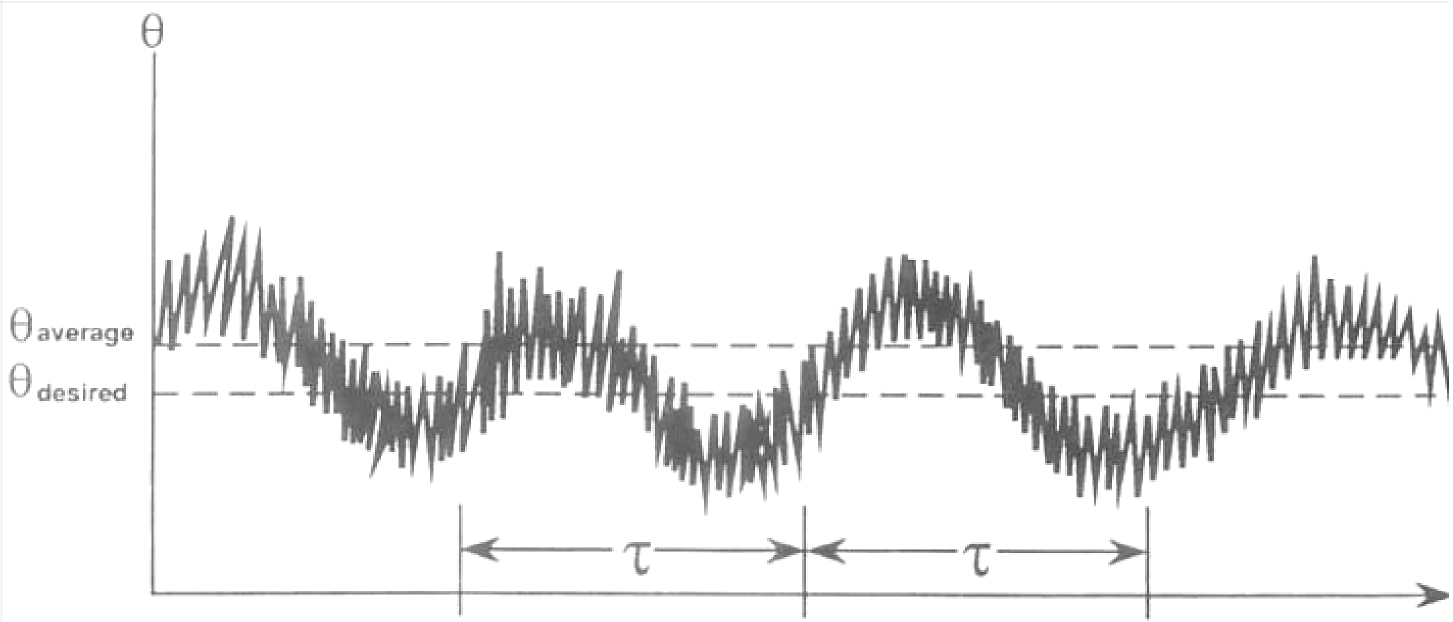
wordt de karakteristieke vergelijking genoemd.
De wortels van deze vergelijking zijn de zogenaamde systeempolen in het complexe frequentiedomein (s-domein). Het gedrag van het standregelsysteem wordt in hoge mate bepaald door de ligging van deze systeempolen in het s-domein en zijn de belangrijkste parameters in het optimaliseren van het regelsysteem.

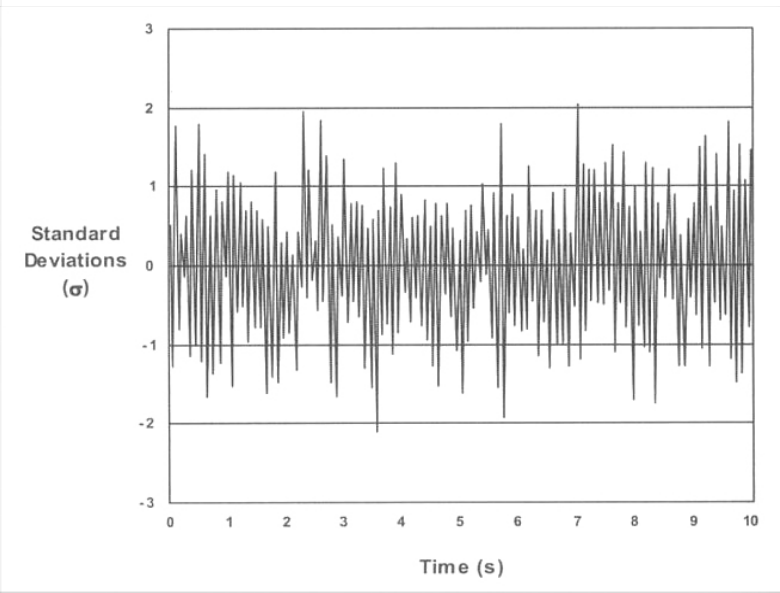
De graad van de polynoom die de karakteristieke vergelijking beschrijft wordt de orde van het standregelsysteem genoemd.

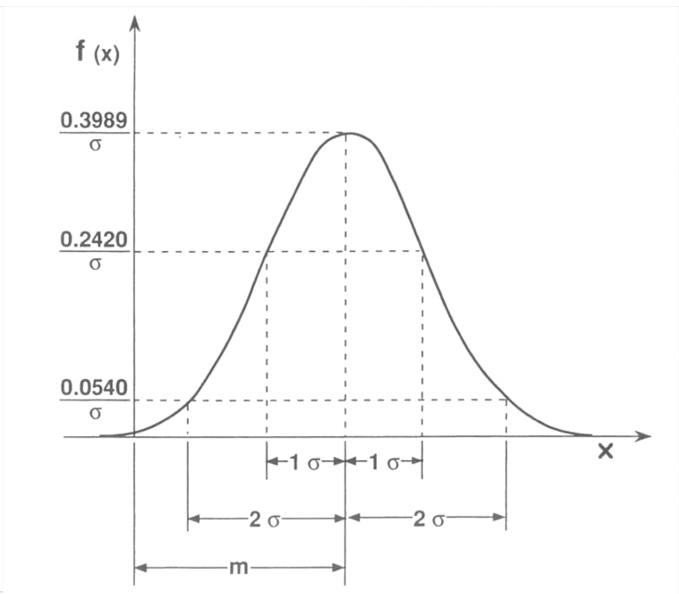
Responsie van een "closed loop" systeem op een stapsgewijze verandering van de gewenste stand



S/C pointing history, attitude jitter



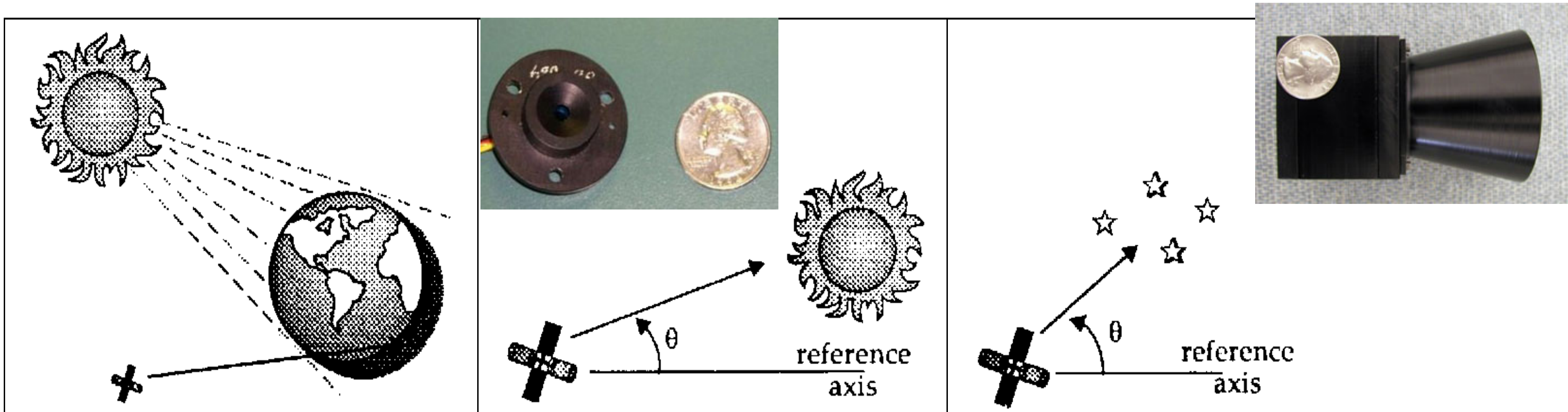




Standsbepaling: sensoren

- Aardesensor (horizon sensor).
  - Maakt gebruik van IR-straling (15 μm CO_2 lijn) voor de detectie van de grens tussen de bovenste laag van de dampkring en buitenaardse ruimte
  - Wordt toegepast als "scanner"
- Zonsensor
- Stersensor
  - Scanner: voor een spinning S/C of een roterend platform
  - Tracker/Mapper: voor een 3-assen-gestabiliseerde S/C
    - Tracker (enkele ster) / Mapper (meerdere sterren)
- Inertiaal referentie
  - Gyro's en accelerometers
- Magnetometer
  - Vereist computeropslag van een magneetveld-model van het betreffende referentie object
- Differentiële GPS

Standsbepaling: sensoren



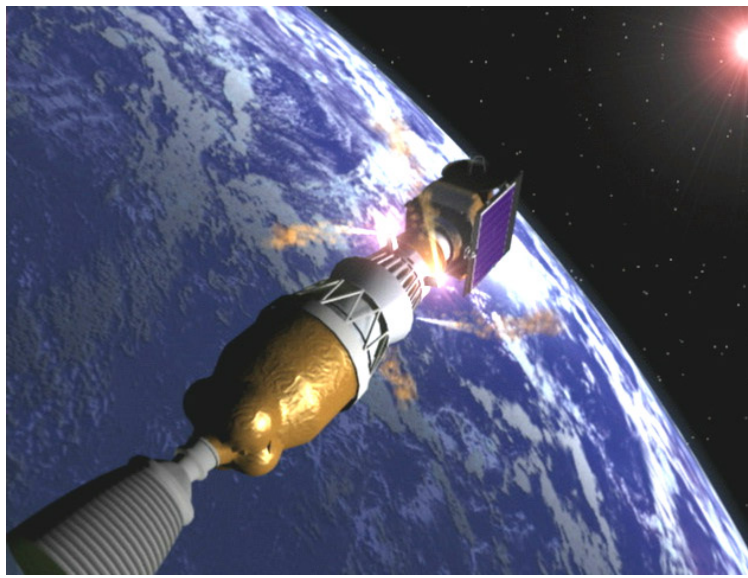
Earth Horizon Sensor | Sun Sensor | Star Tracker

Sensor	Accuracies	Comments
IMU	Drift: 0.0003 – 1 deg/hr 0.001 deg/hr nominal	Requires updates
Star Sensor	1 arcsec – 1 arcmin (0.0003 – 0.001 deg)	2-axis for single star Multiple stars for map
Sun Sensor	0.005 – 3 deg 0.01 deg nominal	Eclipse
Earth Sensor GEO LEO	 < 0.1 – 0.25 deg 0.1 – 1 deg	 2-axis
Magnetometer	0.5 – 3 deg	< 6000 km Difficult for high *i*

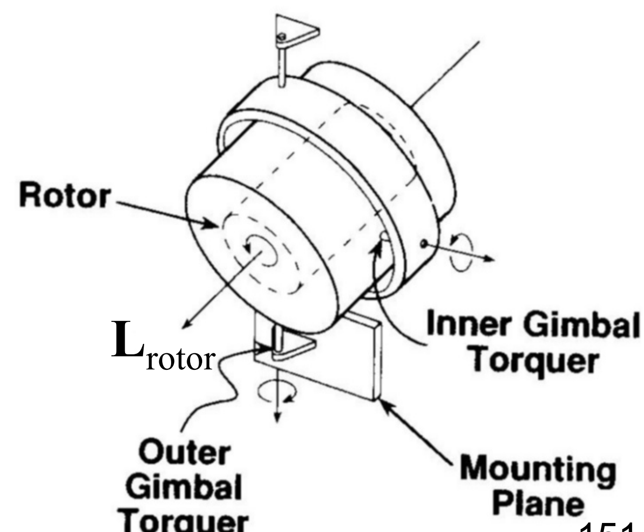
Standregeling: actuatoren

Twee typen actuatoren:

- Passief
  - Gravity Gradient Booms
  - Dempers
  - Yo-yo's
  - Spinning

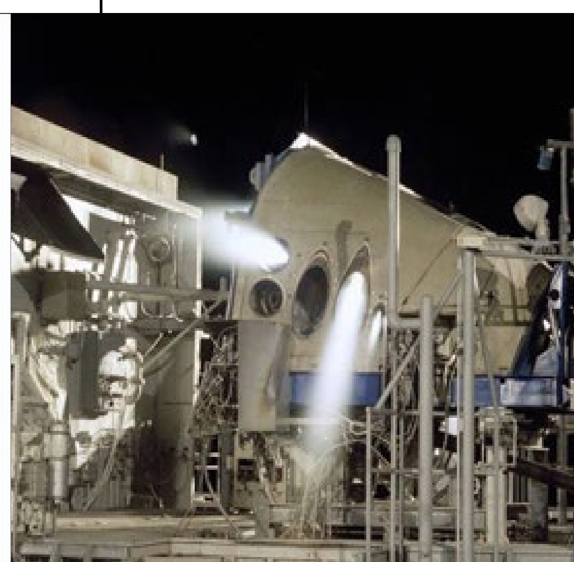
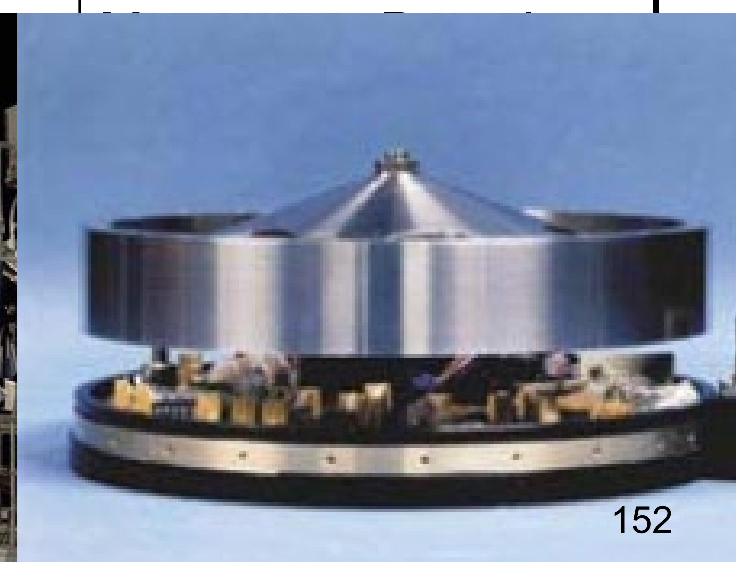


- Actief
  - Stuurraketten
  - Reactiewielen (varieert grootte $\mathbf{L}_{rotor}$)
  - Control Moment Gyro's (varieert richting $\mathbf{L}_{rotor}$)
  - Magnetisch-koppel spoelen (torque rods)



Standregeling: actuatoren

Actuator	Accuracy	Comment
Gravity Gradient	±5º	2 Axis, Simple
Spin Stabilized	±0.1º to ±1º	2 Axis, Rotation
Torque Rods	±1º	High Current
Reaction Wheels	±0.001º to ±0.1º	High Mass and Power,

Standregeling: diverse operationale modi

Typical Attitude Control Modes. Performance requirements are frequently tailored to these different control operating modes.

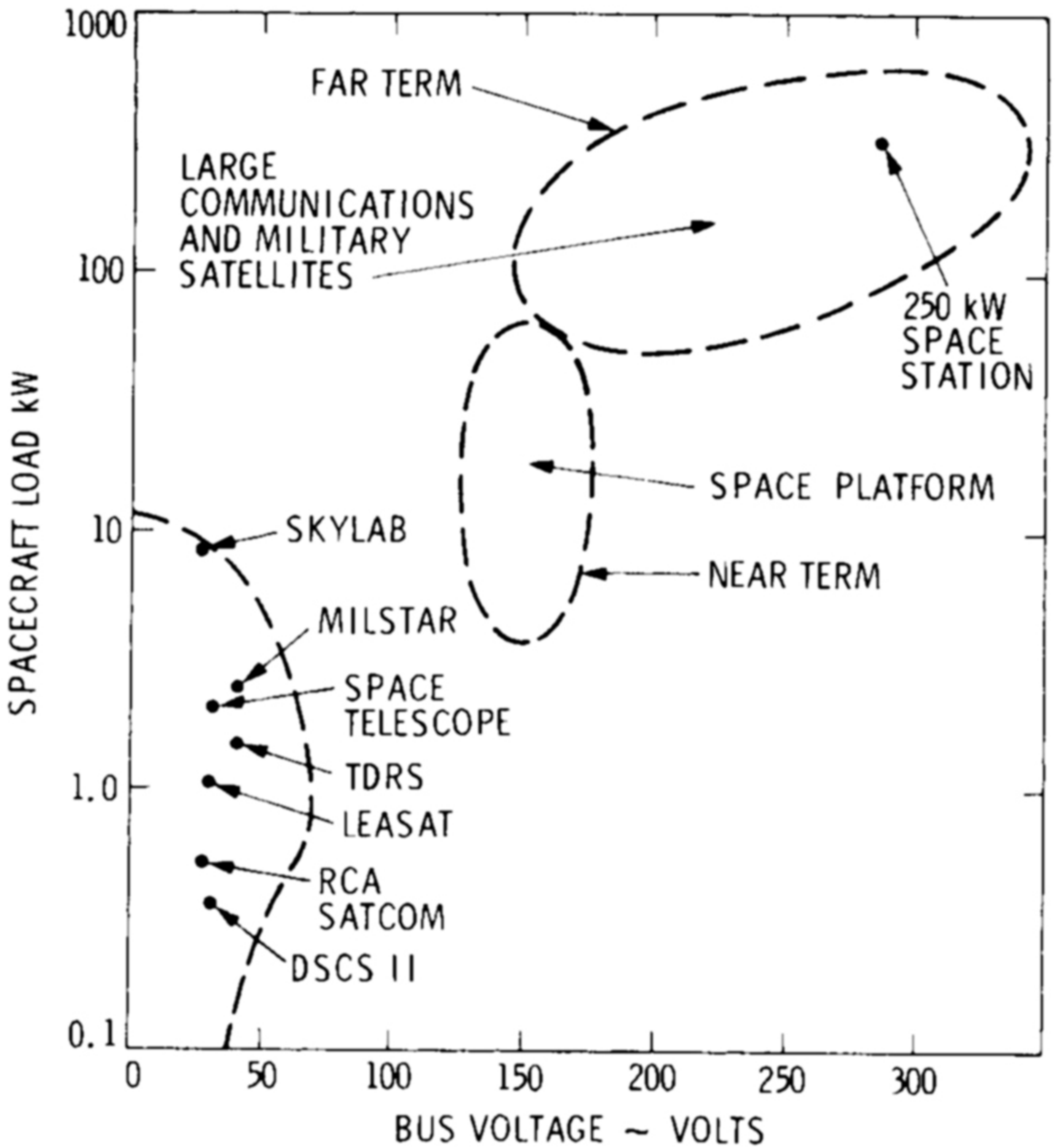
Mode	Description
Orbit Insertion	Period during and after boost while spacecraft is brought to final orbit. Options include no spacecraft control, simple spin stabilization of solid rocket motor, and full spacecraft control using liquid propulsion system.
Acquisition	Initial determination of attitude and stabilization of vehicle. Also may be used to recover from power upsets or emergencies.
Normal, On-Station	Used for the vast majority of the mission. Requirements for this mode should drive system design.
Slew	Reorienting the vehicle when required.
Contingency or Safe	Used in emergencies if regular mode fails or is disabled. May use less power or sacrifice normal operation to meet power or thermal constraints.
Special	Requirements may be different for special targets or time periods, such as eclipses.

Energieopwekking en distributie

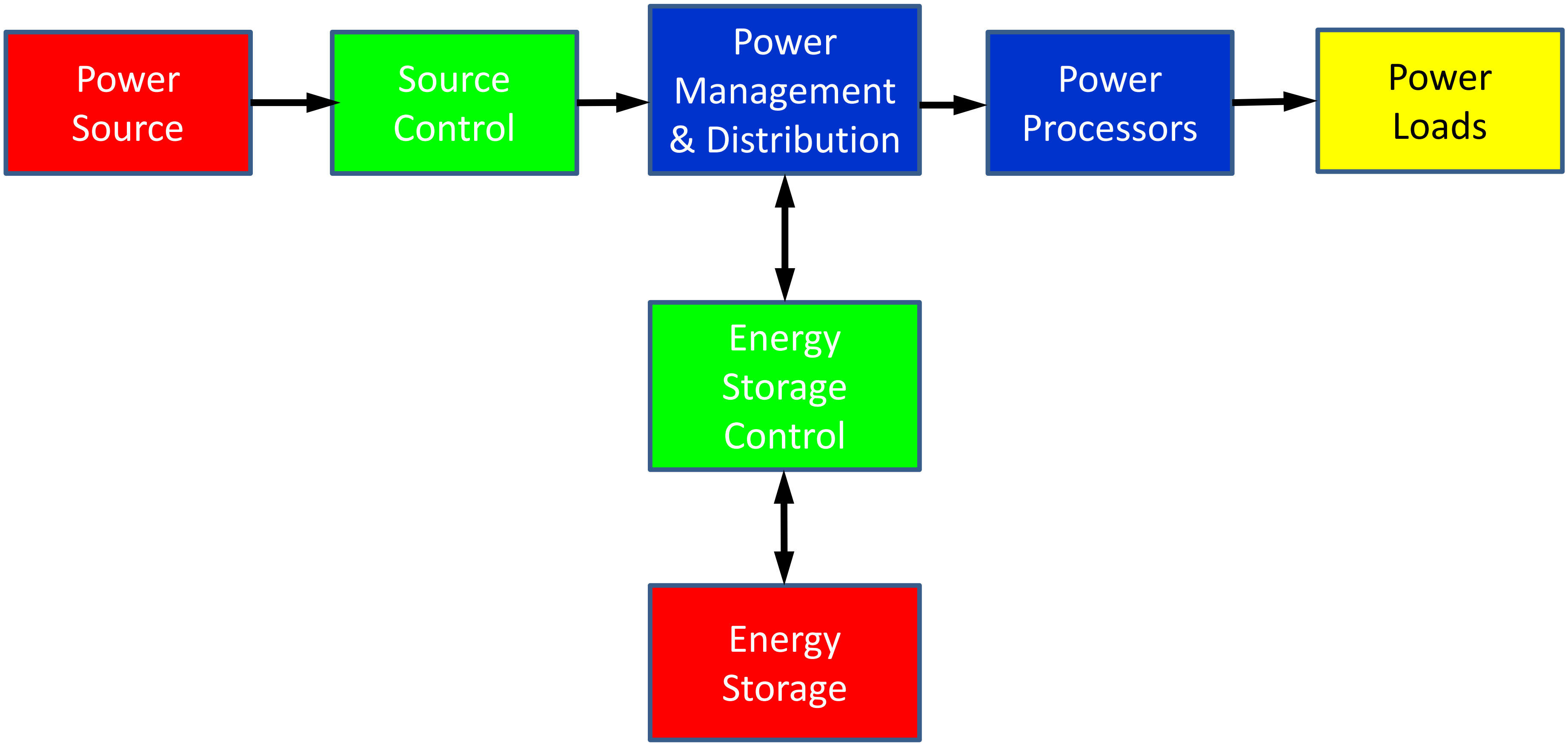
Brandstofcel

Zonne-energie

Radio-isotoop Thermische Generator

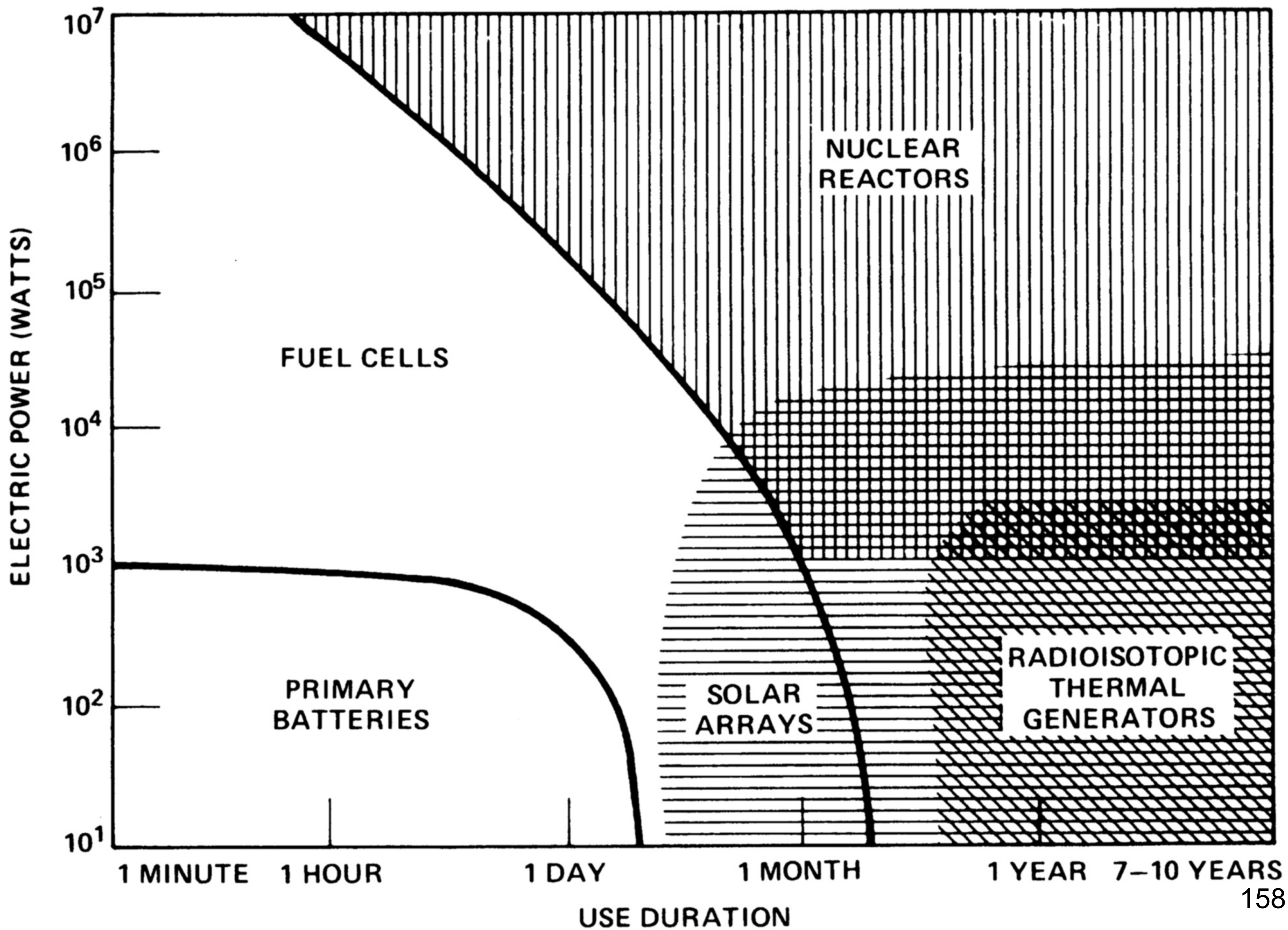

1000
100
10
1.0
0.1
SPACECRAFT LOAD kW
0
50
100
150
200
250
300
BUS VOLTAGE ~ VOLTS
FAR TERM
LARGE COMMUNICATIONS AND MILITARY SATELLITES
250 kW SPACE STATION
SPACE PLATFORM
NEAR TERM
SKYLAB
MILSTAR
SPACE TELESCOPE
TDRS
LEASAT
RCA SATCOM
DSCS II

Sub-systeem voor energievoorziening: functies



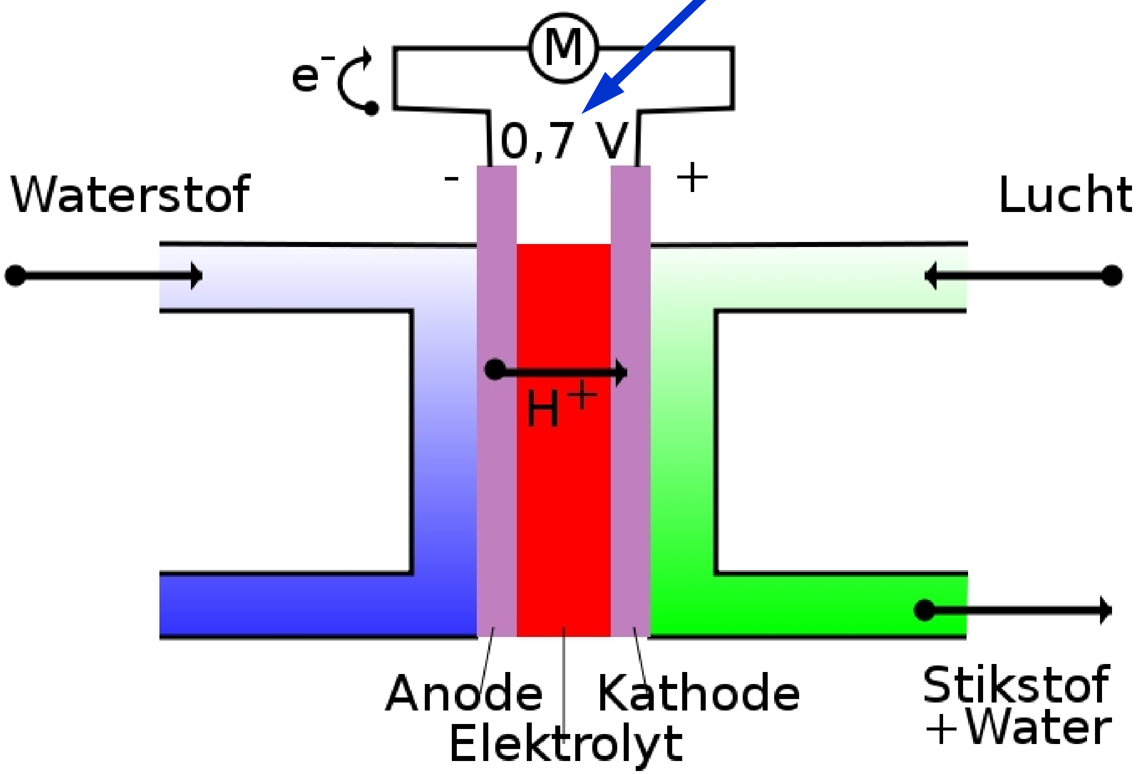
Sub-systeem voor energievoorziening: ontwerp

- **Eisenspecificaties:**
  - Missie levensduur
  - Electrisch vermogensprofiel voor het ruimtevaartuig, gemiddeld vermogen
- **Selectie en dimensionering van de energiebron:**
  - Selectie: brandstofcellen of zonnecellen voor banen om de aarde en de binnenplaneten, RTGs voor de buitenplaneten
  - Dimensionering: End Of Life (EOL) eis en configuratie trade-offs
- **Selectie en dimensionering van de energieopslagcapaciteit:**
  - Duur en frequentie perioden van zonne-eclips door de aarde
  - Type batterij
- **Energie regeling en Controle**
  - Traceer piekbelasting momenten
  - Thermische regeling
  - Bewaking kwaliteit (ruis, storing, stabiliteit) van de satelliet bus-spanningen

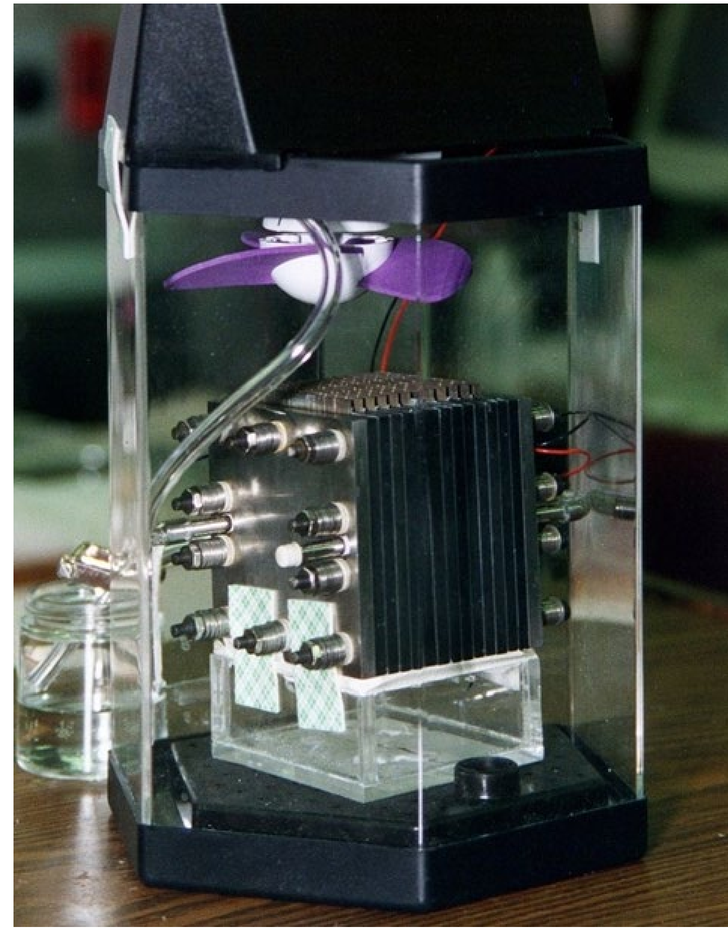


ELECTRIC POWER (WATTS)
10^7
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10^1
NUCLEAR REACTORS
FUEL CELLS
PRIMARY BATTERIES
SOLAR ARRAYS
RADIOISOTOPIC THERMAL GENERATORS
1 MINUTE
1 HOUR
1 DAY
1 MONTH
1 YEAR
7–10 YEARS
USE DURATION

Principe van een brandstofcel



$H_2 \rightarrow 2H^+ + 2e^-$ $\quad$ $O_2 + 4H^+ + 4e^- \rightarrow 2H_2O$



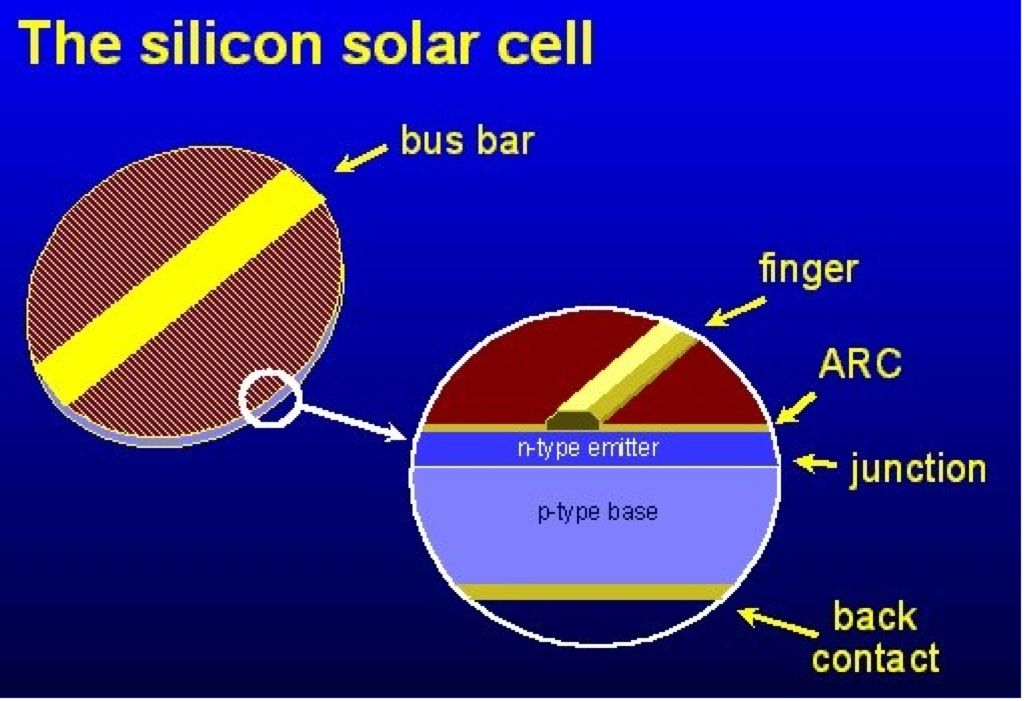
Zonne-energie

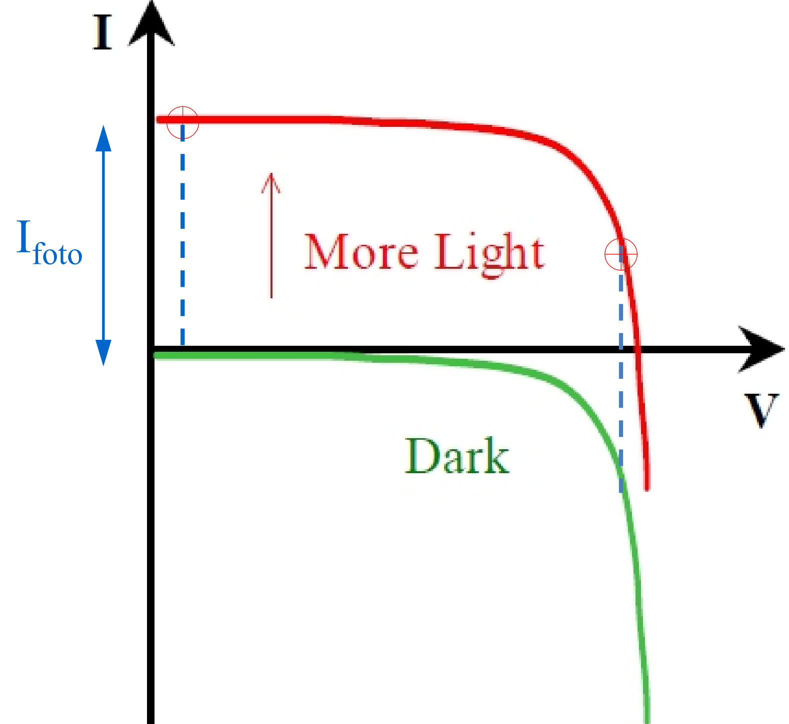
Zonneconstante P_{zon}:

Totale stralingsvermogen van de Zon dat loodrecht invalt op een eenheid van oppervlak geplaatst op de gemiddelde afstand tussen de Zon en de Aarde buiten de aardse dampkring.

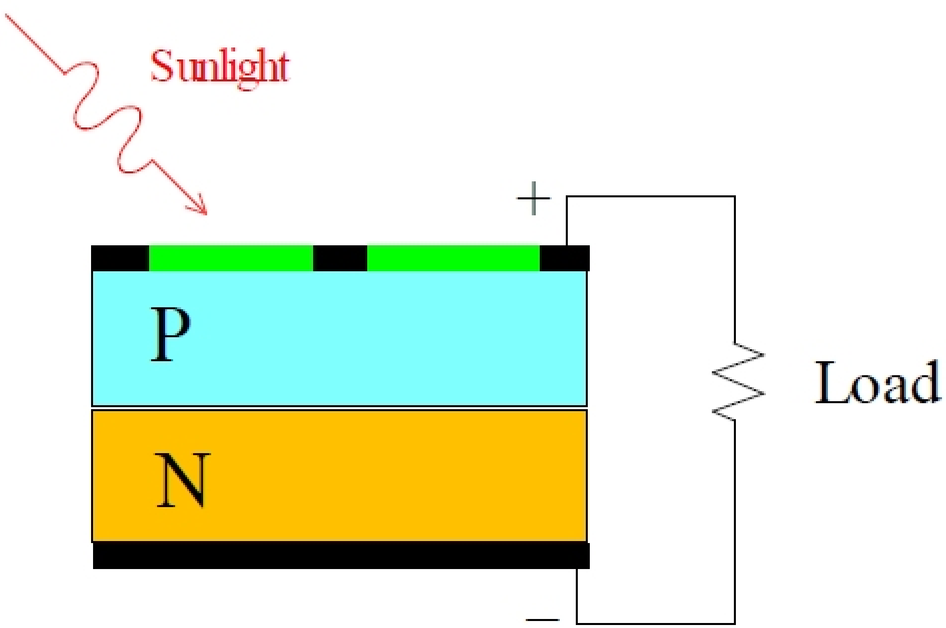
$$P_{zon} = 1358\ W/m^2$$

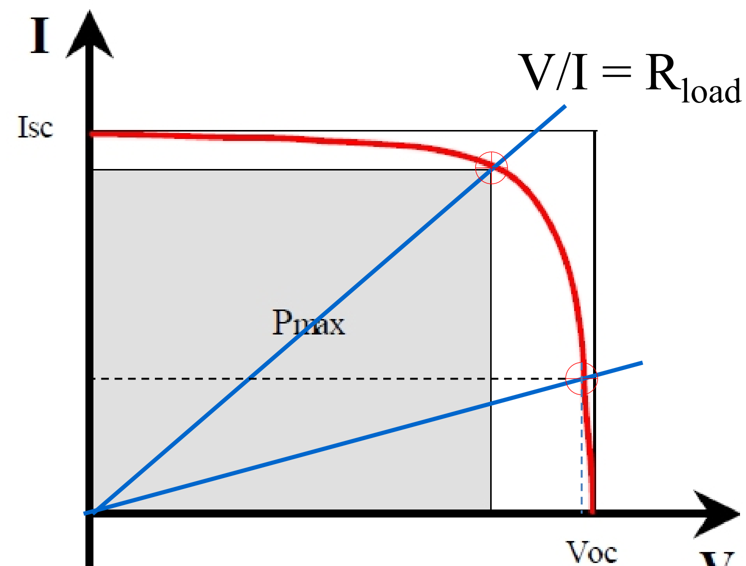
P_{zon} varieert gedurende het jaar tussen 1310 en 1400 W/m^2, maximaal bij het perihelion en minimaal bij het aphelion.



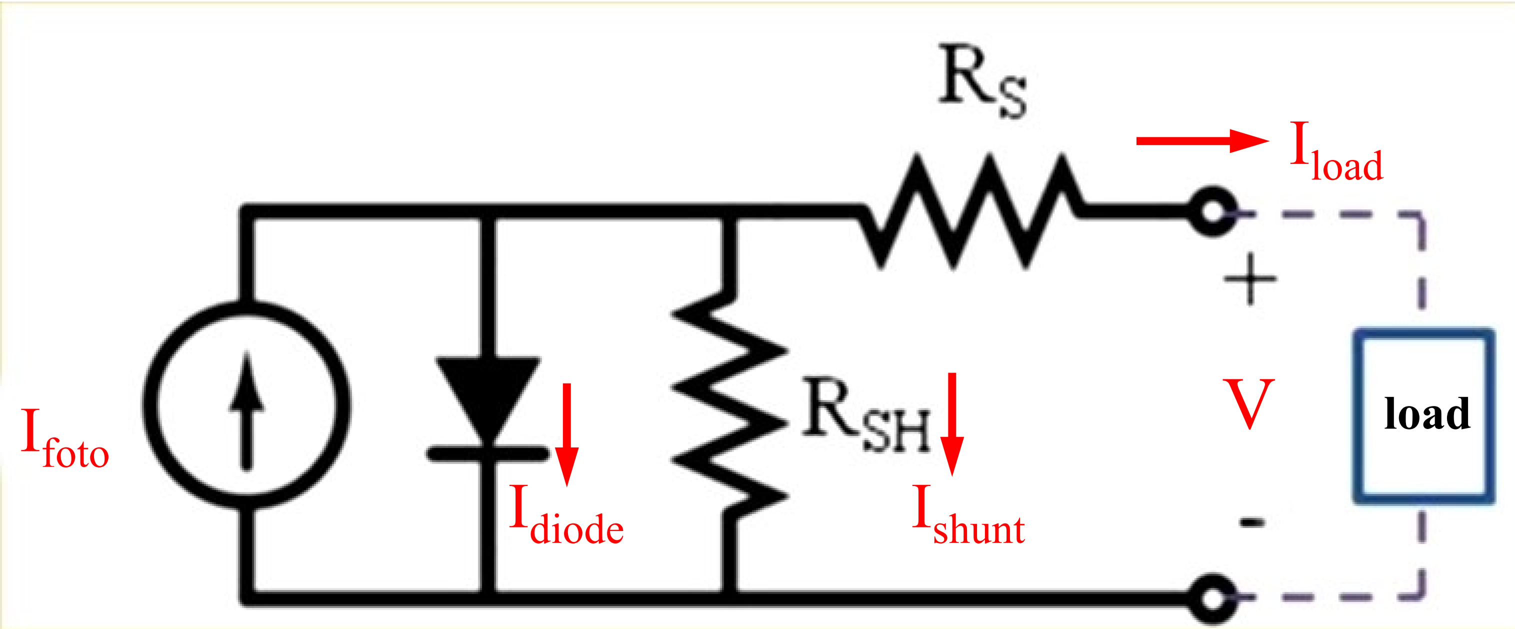


$$I = I_{foto} - I_{diode} = I_{foto} - I_s\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)$$



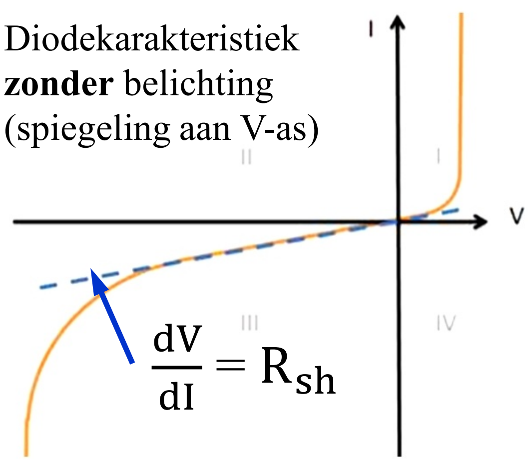


Zonnecel: eenvoudig vervangingsschema

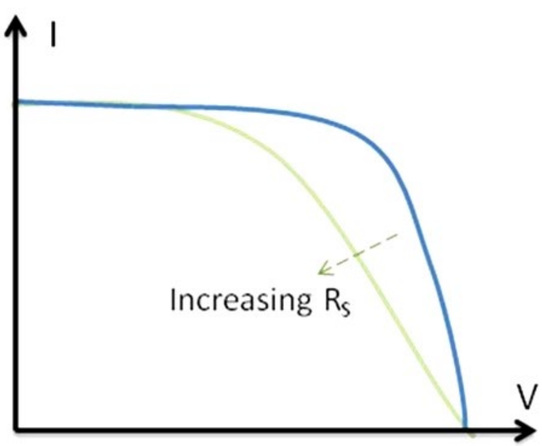


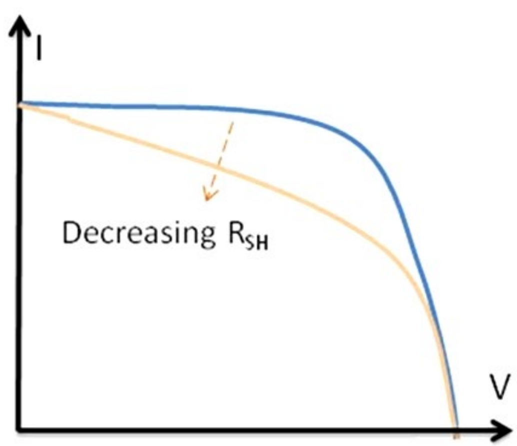
$$I_{load} = I_{foto} - I_{diode} - I_{shunt} = I_{foto} - I_s\left(e^{\frac{q(V+IR_S)}{kT}} - 1\right) - \frac{V + IR_S}{R_{sh}}$$

Diodekarakteristiek **zonder** belichting (spiegeling aan V-as)



$$\frac{dV}{dI} = R_{sh}$$





Verliesfactoren in zonnepanelen

- **Omzettingsrendement in halfgeleidermateriaal:**
  - Silicium (Si) ≈ 0,14
  - Galliumarsenide (GaAs) ≈ 0,19
  - Indiumfosfide (InP) ≈ 0,18
  - Multi-junctie GaAs/Si ≈ 0,29

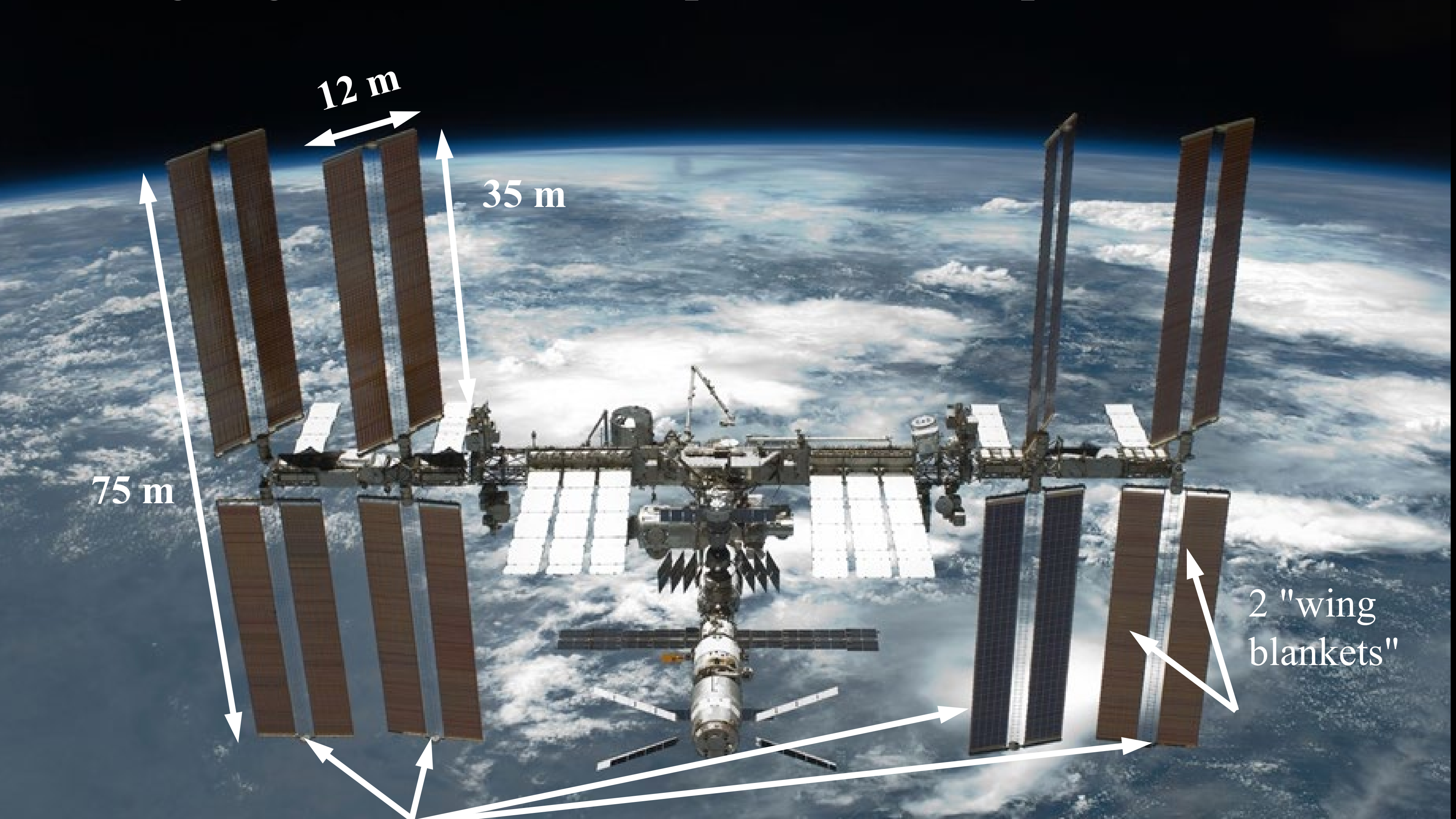
- **Inherente verliezen (≈ 0,8):**
  - Montagestructuur en assemblage verliezen
  - Verliezen door temperatuursvariaties

- **Projectieverliezen (cos θ):**
  - Invalshoek tussen de Zon-vector en de normaal-vector op het paneel

- **Verliezen gedurende levensduur**
  - Thermische cycli
  - Inslag micrometeorieten
  - uitgassing en oppervlaktecontaminatie
  - stralingsbeschadiging
  - $L = (1 - \text{verlies/jaar})^{\text{satellietlevensduur}}$

ISS bij vertrek van Endeavour op 30 mei 2011 (STS 134)

Vermogen geleverd door complete set zonnepanelen ≈ 270 kW

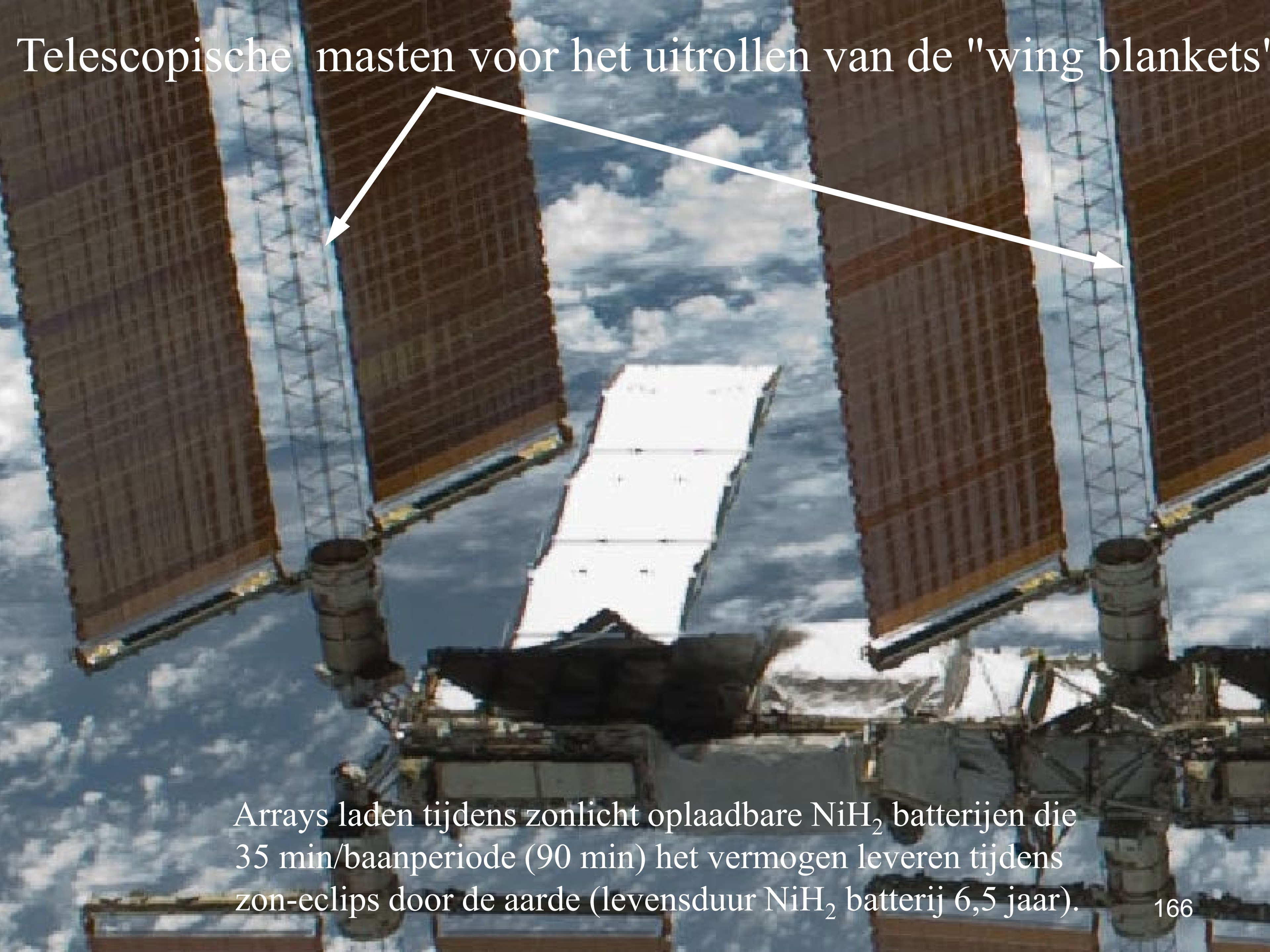


Totale set bestaat uit 4 "array wing pairs"

Array wing: ≈ 33000 cellen(8 x 8 cm), effectief oppervlak 375 m^2, ≈ 33kW

ISS solar arrays: stowed configuration

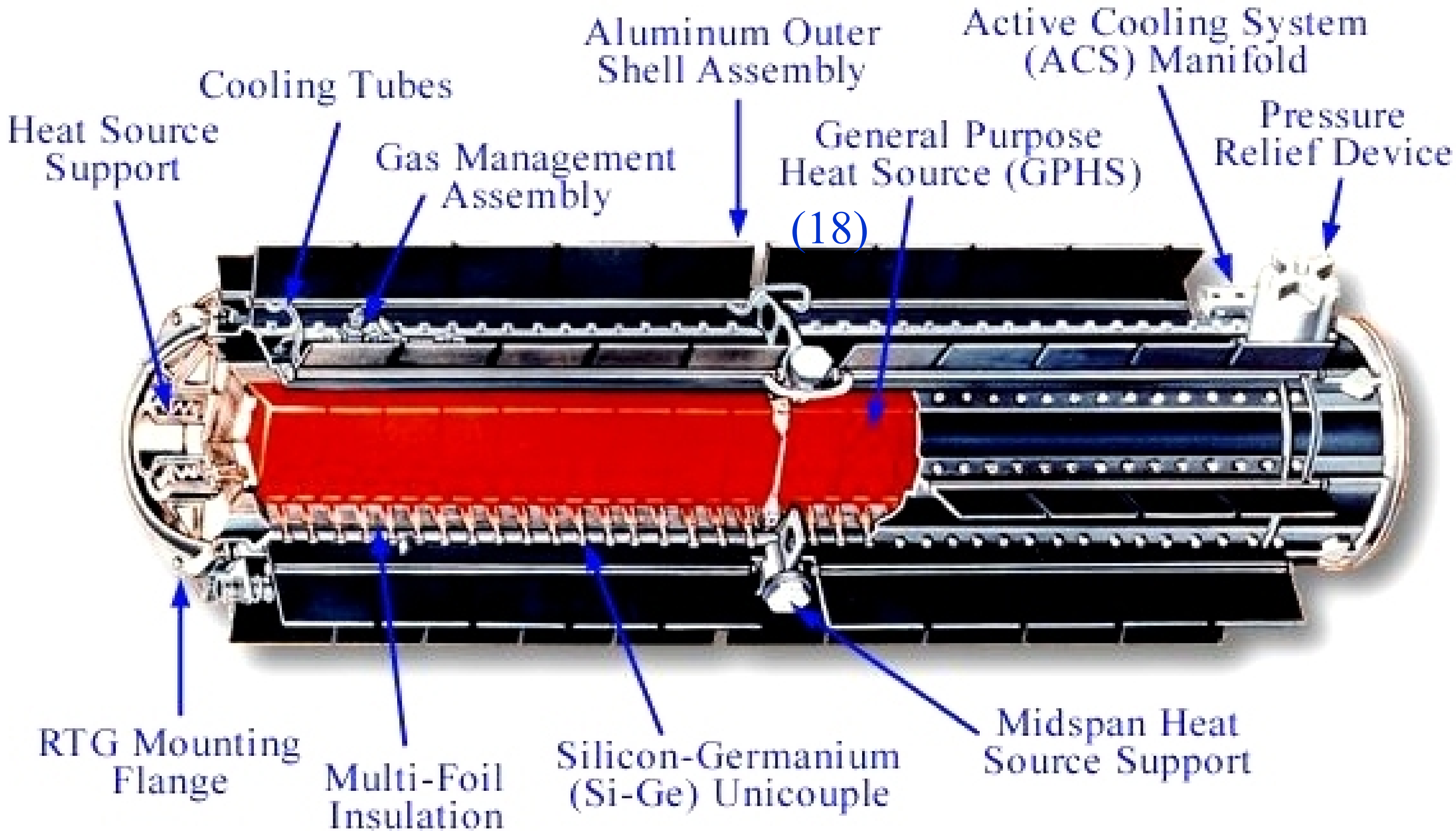
Wing blanket in opgevouwen toestand (harmonica)
Past in box van 4,5 m lang x 0,5 m hoog


Telescopische masten voor het uitrollen van de "wing blankets"
Arrays laden tijdens zonlicht oplaadbare NiH_2 batterijen die 35 min/baanperiode (90 min) het vermogen leveren tijdens zon-eclips door de aarde (levensduur NiH_2 batterij 6,5 jaar).

Radioisotoop Thermo-electrische Generator (RTG)

o.a. Pionier ,Voyager, Ulysses, Galileo, Cassini, Pluto/Kuiper Belt fly-by

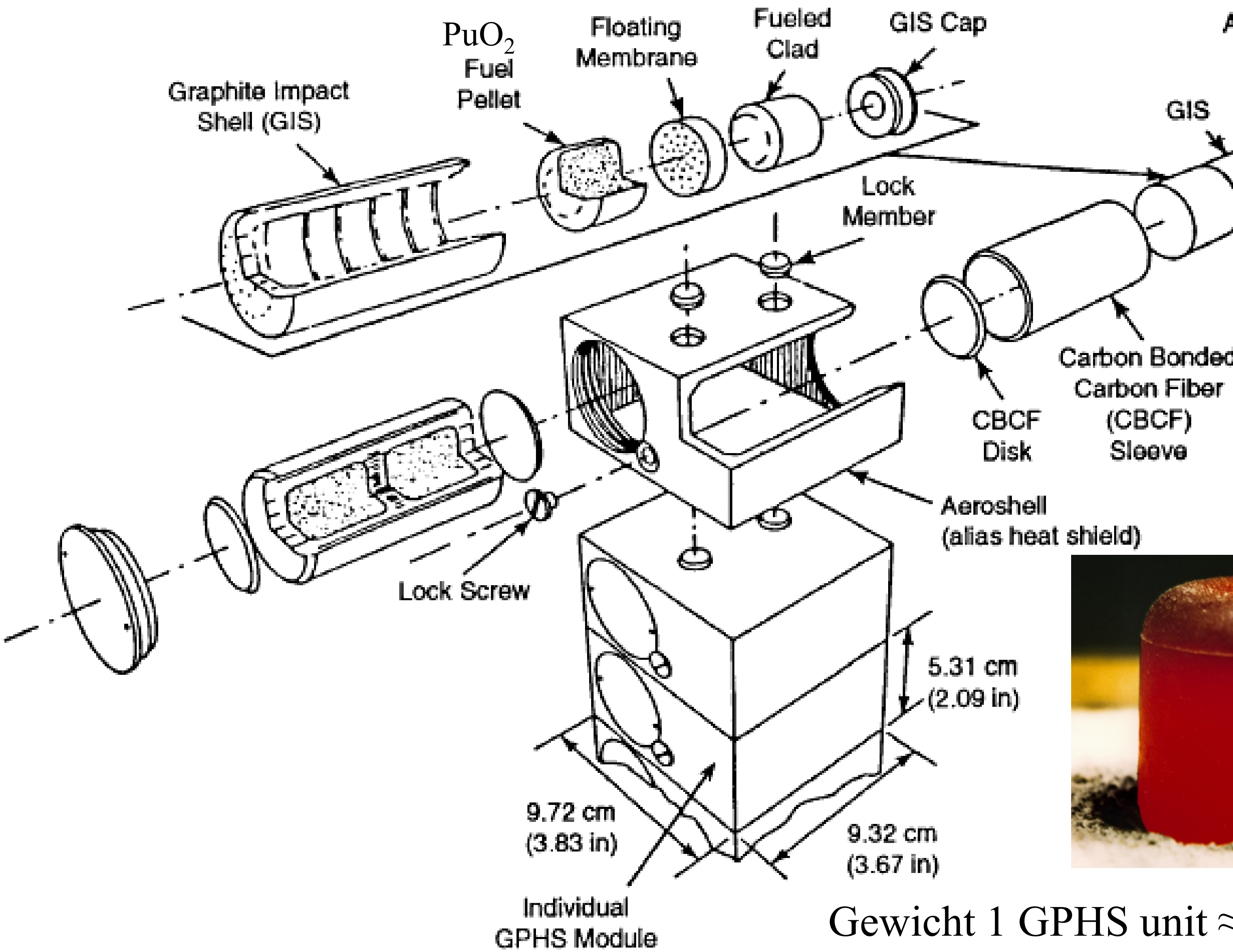
Warmtebron: radioactief verval ^{238}Pu $\rightarrow \alpha \rightarrow$ ^{234}U, hw. tijd 87,8 jaar,
Thermisch vermogen 4300 W $\rightarrow$ electrisch vermogen 300 W($\varepsilon \approx 7$ %)



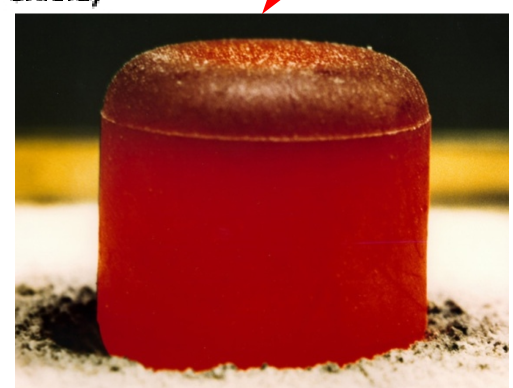
(Thermoelectric devices, Seebeck effect in thermocouple)

Opbouw General Purpose Heat Source element in RTG

Irridium mantel (smeltpunt 2500 C)

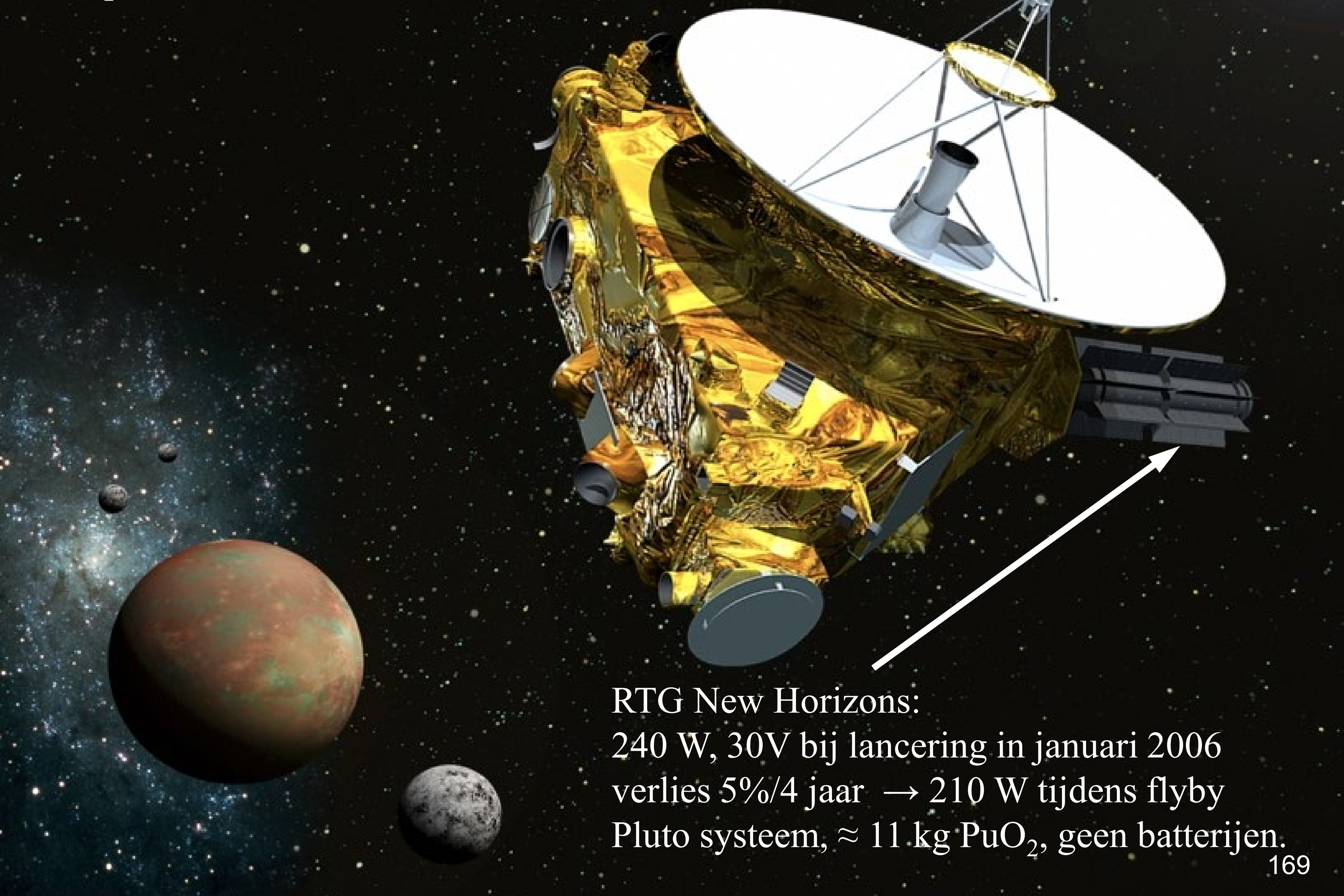


Pu-dioxide
pellet



Gewicht 1 GPHS unit ≈ 1,5 kg (18x)

New Horizons naar Pluto/Charon en Kuiper Belt, lancering 2006, Pluto flyby 2015, Kuiper Belt 2019. Verlaat zonnestelsel in 2029.



RTG New Horizons:
240 W, 30V bij lancering in januari 2006
verlies 5%/4 jaar $\rightarrow$ 210 W tijdens flyby
Pluto systeem, $\approx$ 11 kg PuO_2, geen batterijen.

New Horizons: Integrated System Test in the clean room

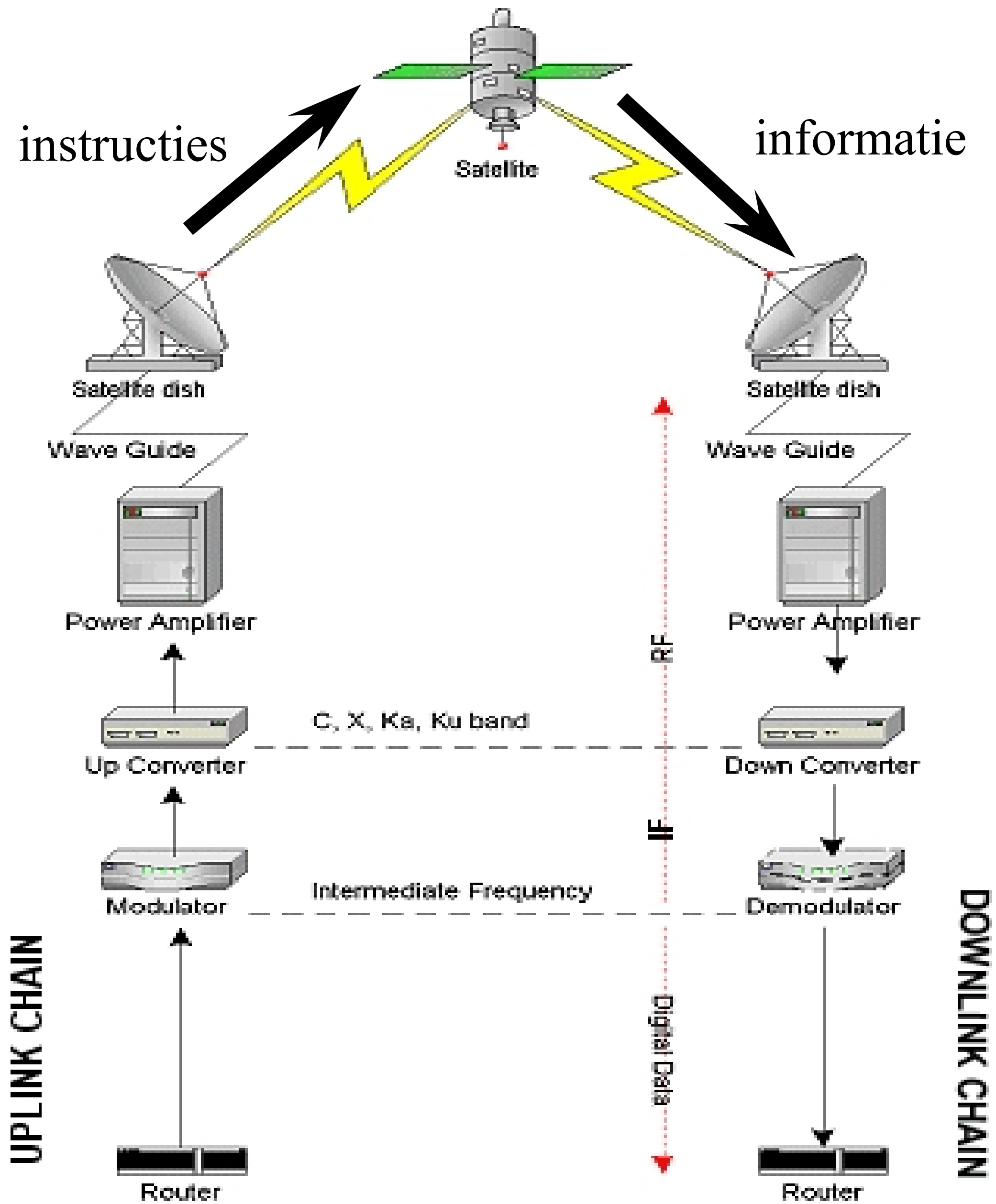
Juno mission naar Jupiter (lancering augustus 2011), zonnepanelen 60 m^2.
Grootste array ooit voor Deep Space.

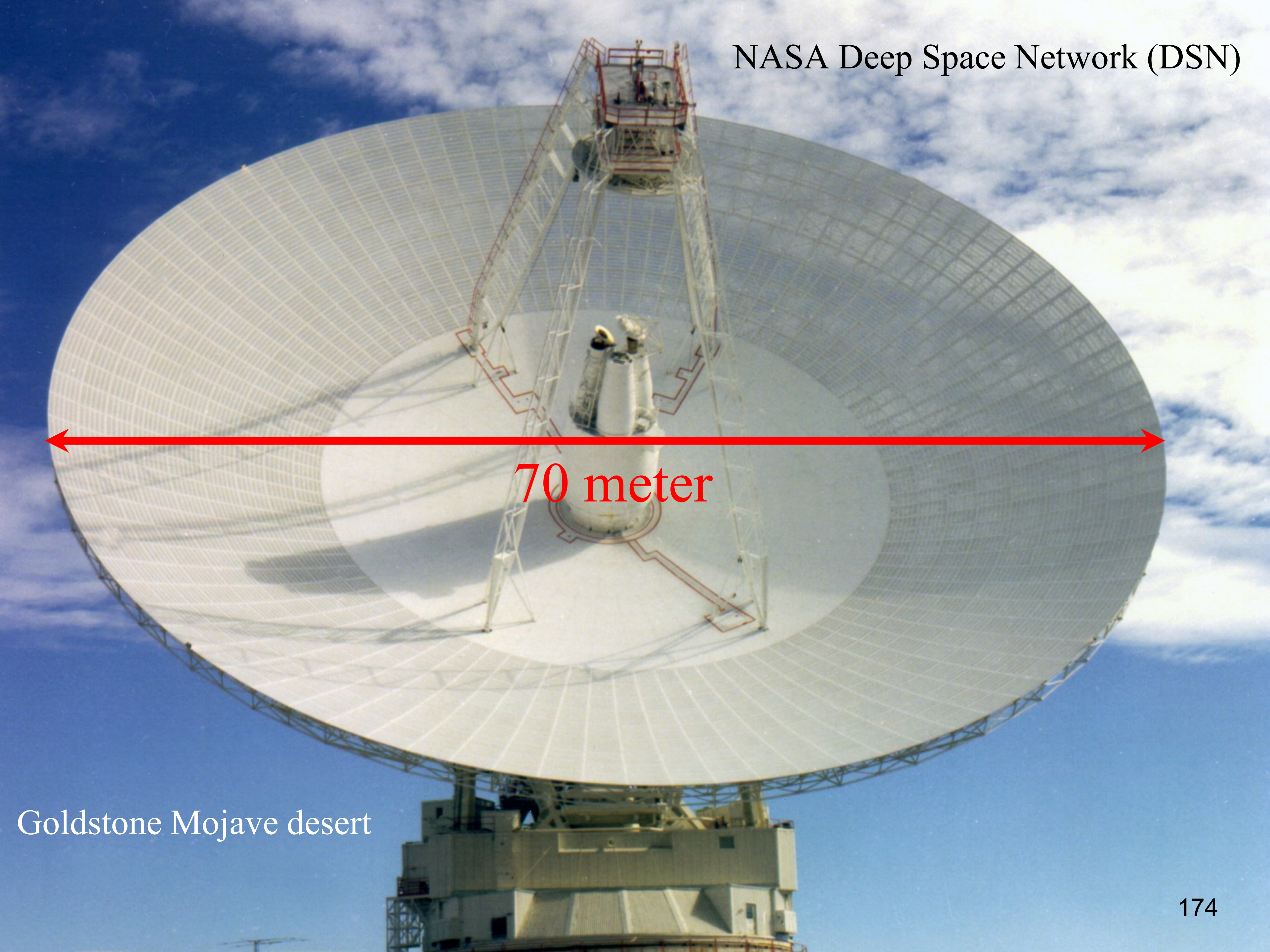
Stralingsvermogen Zon: bij Jupiter 4% t.o.v. Aarde.
Electrisch vermogen ≈ 500 W ↓ 400 W EOL, in aardbaan ≈ 13 kW.

Operatie/Exploitatie

- Grondstation
  - Up link : Commando's en Instructies
  - Down link : Gegevensstroom
- Gegevensopslag,-bewerking,-archivering
- Gebruikersaansluiting
- Training

Telemetrie/Telecommando keten




NASA Deep Space Network (DSN)
70 meter
Goldstone Mojave desert